E. Lau

Lineare Algebra 2, Übungsblatt 11

Abgabe **Freitag 21.6.2019** bis 10:15 Uhr im Postfach des Tutors in V3-216

Die Abgabe ist in Zweiergruppen möglich.

Aufgabe 1. Es sei K ein Körper. Zeigen Sie: Das Bild der Abbildung

$$K^2 \times K^2 \to K^2 \otimes K^2, \quad (x,y) \mapsto x \otimes y$$

ist die Menge aller $a(e_1 \otimes e_1) + b(e_1 \otimes e_2) + c(e_2 \otimes e_1) + d(e_2 \otimes e_2)$ mit $a, b, c, d \in K$ und $ad = bc$. Hier sind e_1, e_2 die Standardbasisvektoren von K^2.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass jedes $A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ eine eindeutige Darstellung $A = QDU$ hat, für die gilt:

$Q \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$,

D ist diagonal mit positiven Diagonaleinträgen und Determinante 1,

U ist eine unipotente obere Dreiecksmatrix.

Hinweis: Betrachten Sie die Determinante in der Iwasawa-Zerlegung von A als Element von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Aufgabe 3. Es seien L ein Körper und $K \subseteq L$ ein Teilkörper, also eine Teilmenge, die durch die Rechenoperationen von L ebenfalls ein Körper wird. (Denken Sie sich ein Beispiel mit $K \neq L$ aus.) Des Tensorpordukt von K-Vektorräumen wird mit $\otimes_K$ bezeichnet. Es sei V ein K-Vektorraum. Zeigen Sie:

1. Die abelsche Gruppe $V \otimes_K L$ wird ein L-Vektorraum, auf dem $a \in L$ durch $\mathrm{id}_V \otimes a$ operiert, wobei $a : L \to L$ die Multiplikation mit a bezeichnet.
2. Wenn $(e_i)_{i \in I}$ eine K-Basis von V ist, dann ist $(e_i \otimes 1)_{i \in I}$ eine L-Basis von $V \otimes_K L$.
3. Für einen L-Vektorraum W und eine K-lineare Abbildung $f : V \to W$ gibt es eine eindeutige L-lineare Abbildung $g : V \otimes_K L \to W$ mit $g(v \otimes 1) = f(v)$.

Aufgabe 4. Für zwei K-Vektorräume V, W betrachten wir die lineare Abbildung

$$\psi : V^* \otimes W \to \mathrm{Hom}(V, W),$$

die durch $\lambda \otimes w \mapsto f$ mit $f(v) = \lambda(v)w$ definiert ist. Zeigen Sie:

1. Das Bild der Abbildung

   $$V^* \times W \to \mathrm{Hom}(V, W), \quad (\lambda, w) \mapsto \psi(\lambda \otimes w)$$

   ist die Menge aller linearen Abbildungen $f : V \to W$ mit $\dim(\mathrm{Bild}(f)) \leq 1$.
2. Das Bild von ψ ist die Menge aller linearen Abbildungen $f : V \to W$ mit endlichdimensionalem Bild.
3. Wenn V und W unendliche Dimension haben, dann ist ψ nicht surjektiv.