E. Lau

Lineare Algebra 2, Präsenzübungsblatt 2

Aufgabe 1. Es sei R ein Ring und $I \subseteq R$ ein Ideal. Zeigen Sie: Genau dann gilt $I = R$, wenn I eine Einheit von R enthält.

Aufgabe 2. Es sei R ein Integritätsbereich. Zeigen Sie:

1. Für jedes $a \in R$ ist a ein ggT von $a, 0$.
2. Für $a \in R$ und $b \in R^*$ ist 1 ein ggT von a, b.

Aufgabe 3. Es sei K ein Körper. Für

$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in K[X]$$

definieren wir die formale Ableitung von f als

$$f' = \sum_{i=1}^{n} i a_i X^{i-1} \in K[X].$$

Zeigen Sie

1. Es gilt die Leibnizregel $(fg)' = f'g + fg'$.
2. Für $a \in K$ und $f \in K[X]$ gilt genau dann $f(a) = 0$ und $f'(a) = 0$, wenn $f = (X - a)^2 h$ für ein $h \in K[X]$.

Hinweis: Wenden Sie auf eine Darstellung $f = (X - a)g$ die Leibnizregel an.