E. Lau

Lineare Algebra 2, Präsenzübungsblatt 5

Aufgabe 1. Es sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus mit $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Bild}(f)$. Bestimmen Sie die Jordansche Normalform von f.

Aufgabe 2. (Haupträume) Es seien V und W zwei K-Vektorräume, $f \in \mathrm{End}(V)$ und $g \in \mathrm{End}(W)$. Weiter sei $h : V \to W$ eine lineare Abbildung mit $g \circ h = h \circ f$. Zeigen Sie, dass für jedes $\lambda \in K$ die Inklusion $h(\tilde{V}_f(\lambda)) \subseteq \tilde{W}_g(\lambda)$ gilt.

Aufgabe 3. Es sei $V = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(f) \leq n\}$ mit der Basis $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$. Zeigen Sie, dass

$$\beta : V \times V \to \mathbb{R}, \qquad (f, g) \mapsto \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

eine Bilinearform ist und bestimmen Sie die darstellende Matrix $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\beta)$.

Aufgabe 4. Es seien U, V, W drei K-Vektorräume. Zeigen Sie:

1. $\mathrm{Bil}(V \times W, U)$ ist ein Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(V \times W, U)$.
2. Für eine bilineare Abbildung $\beta : V \times W \to U$ und lineare Abbildungen $f : V' \to V$, $g : W' \to W$, $h : U \to U'$ ist die Komposition $h \circ \beta \circ (f \times g)$ eine bilineare Abbildung $V' \times W' \to U'$.