E. Lau

Lineare Algebra 2, Präsenzübungsblatt 6

Aufgabe 1. Es seien $A, B \in M_n(K)$ zwei kongruente Matrizen. Zeigen Sie, dass $\det(A) = c^2 \det(B)$ für ein $c \in K$ mit $c \neq 0$.

Aufgabe 2. Es sei β die durch $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ bestimmte symmetrische Bilinearform auf $V = \mathbb{R}^2$ und $W = \langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \rangle$ ein eindimensionaler Untervektorraum von V.

1. Bestimmen Sie das orthogonale Komplement $W^\perp$.
2. Für welche a, b ist die Einschränkung von β auf W nicht-ausgeartet?
3. Für welche a, b gilt $V = W \oplus W^\perp$?

Aufgabe 3. Es seien $\beta : V \times W \to K$ eine Bilinearform und $V_0 \subseteq V$ sowie $W_0 \subseteq W$ die Nullräume von β. Zeigen Sie: Wenn V und W endlichdimensional sind, dann gilt

$$\dim(V) - \dim(V_0) = \dim(W) - \dim(W_0).$$

Aufgabe 4. Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Zeigen Sie:

1. Die Abbildung
$$\gamma : V \times V^* \to K, \qquad \gamma(v, h) = h(v)$$
ist eine nicht ausgeartete Bilinearform.
2. Universelle Eigenschaft von γ: Für jede Bilinearform $\beta : V \times W \to K$ gibt es eine eindeutige lineare Abbildung $f : W \to V^*$ so dass $\beta(v, w) = \gamma(v, f(w))$ für alle $v \in V$ und $w \in W$.