E. Lau

Lineare Algebra 2, Präsenzübungsblatt 8

Aufgabe 1. Zeigen Sie:

1. Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K der Charakteristik ungleich zwei. Für eine symmetrische Bilinearform $\beta : V \times V \to K$ und $q(x) = \beta(x, x)$ gilt
$$\beta(x, y) = \frac{1}{4}(q(x + y) - q(x - y)).$$

2. Es sei V ein komplexer Vektorraum. Für eine hermitesche Form $h : V \times V \to \mathbb{C}$ und $q(x) = h(x, x)$ gilt
$$h(x, y) = \frac{1}{4}(q(x + y) - q(x - y) + iq(x + iy) - iq(x - iy)).$$

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die Signatur der Hermiteschen Matrix $\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3. Zeigen Sie:

1. Eine symmetrische reelle Matrix A ist genau dann positiv definit, wenn es eine invertierbare reelle Matrix S gibt so dass $A = S^t S$.

2. Eine Hermitesche komplexe Matrix A ist genau dann positiv definit, wenn es eine invertierbare komplexe Matrix S gibt so dass $A = S^* S$.

Folgern Sie daraus direkt, dass $\det(A) > 0$, wenn A positiv definit ist.

Aufgabe 4. Es sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum.

1. Zeigen Sie, dass eine quadratische Form q auf V genau dann anisotrop ist, wenn sie positiv definit oder negativ definit ist.

2. Es sei q eine nicht-ausgeartete quadratischer Form auf V mit der Signatur $(r, s, 0)$. Bestimmen Sie den Index und den anisotropen Kern von q.