Universität Bielefeld

# Regularitätsresultate für parabolische Gleichungen mit nichtlokalem Operator

Matthieu Felsinger

Universität Bielefeld

Mathematisches Kolloquium, TU Clausthal

05. Februar 2014

1 Einleitung
2 Nichtlokale Operatoren
3 Regularitätsresultate für Gleichungen fraktioneller Ordnung
4 Ausschnitte aus dem Beweis der Harnack-Ungleichung

1 Einleitung

2 Nichtlokale Operatoren

3 Regularitätsresultate für Gleichungen fraktioneller Ordnung

4 Ausschnitte aus dem Beweis der Harnack-Ungleichung

1 Einleitung
Gleichungen in Divergenzform
Mosers klassische Resultate
Rück- und Ausblick

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ beschränktes Gebiet, $T > 0$, $Q_T = (0,T) \times \Omega$.

## Rand-Anfangswertproblem der Wärmeleitung

Finde $u\colon [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ derart, dass

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \Delta u(t,x) = f(t,x) & \text{in } Q_T\,, \\ u = 0 & \text{auf } [0,T] \times \Omega^c, \\ u(0,\cdot) = u_0(\cdot) & \text{in } \Omega\,. \end{cases}$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ beschränktes Gebiet, $T > 0$, $Q_T = (0,T) \times \Omega$.

## Gleichung zweiter Ordnung in Divergenzform

Sei $A\colon [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathcal{S}_{d\times d}$.

$$\begin{aligned} \partial_t u(t,x) - \operatorname{div}(A(t,x)\nabla u(t,x)) &= f(t,x) && \text{in } Q_T, \\ u &= 0 && \text{auf } [0,T] \times \Omega^c, \\ u(0,\cdot) &= u_0(\cdot) && \text{in } \Omega\,. \end{aligned}$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ beschränktes Gebiet, $T > 0$, $Q_T = (0,T) \times \Omega$.

## Gleichung zweiter Ordnung in Divergenzform

Sei $A\colon [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathcal{S}_{d\times d}$.

$$\partial_t u(t,x) - \operatorname{div}(A(t,x)\nabla u(t,x)) = f(t,x) \qquad \text{in } Q_T\,.$$

*Annahme:* $A$ messbar und es gebe $\lambda > 0$ mit

$$\lambda^{-1}|\xi|^2 \leq A(t,x)\xi \cdot \xi \leq \lambda |\xi|^2 \qquad \text{für f.a. } (t,x) \in Q_T, \xi \in \mathbb{R}^d\,.$$

Selbst für glatte Funktionen $u$ ist $\operatorname{div}(A\nabla u)$ nicht definiert!
$\rightsquigarrow$ schwache Formulierung mit Bilinearform

$$\mathcal{E}_t^A(u,v) = \int_\Omega A(t,x)\nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

1 Einleitung
Gleichungen in Divergenzform
Mosers klassische Resultate
Rück- und Ausblick

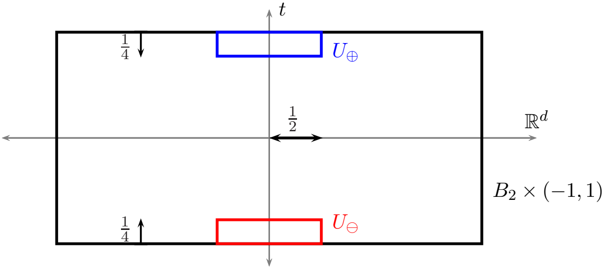
## Harnack-Ungleichung

$$\partial_t u(t,x) - \operatorname{div}(A(t,x)\nabla u(t,x)) = f(t,x) \qquad \text{in } Q. \tag{1}$$

### Mosers Harnack-Ungleichung (1964, ’67, ’71)

Es gibt $C = C(d,\lambda) > 0$ derart, dass jede auf $Q = (-1,1) \times B_2(0)$ nichtnegative Lösung von (1) die folgende Ungleichung erfüllt:

$$\sup_{U_\ominus} u \le C \left( \inf_{U_\oplus} u + \|f\|_{L^\infty(Q)} \right) .$$



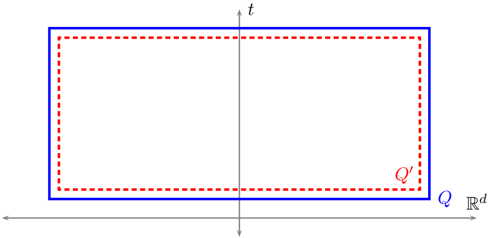
# Hölder-Regularität

$$\partial_t u(t,x) - \operatorname{div}(A(t,x)\nabla u(t,x)) = 0 \qquad \text{in } Q. \tag{2}$$

## Hölder-Stetigkeit (Moser 1964)

Es gibt $\beta = \beta(d,\lambda) \in (0,1)$ derart, dass jede Lösung $u$ von (2) in $Q$ für jedes $Q' \Subset Q$ die folgende Abschätzung erfüllt:

$$\sup_{(t,x),(s,y)\in Q'} \frac{|u(t,x)-u(s,y)|}{\left(|x-y|+|t-s|^{1/2}\right)^{\beta}} \leq \frac{\|u\|_{L^\infty(Q)}}{\eta^\beta}, \quad \text{wobei } \eta = \eta(Q,Q') > 0\,.$$



1 Einleitung
Gleichungen in Divergenzform
Mosers klassische Resultate
Rück- und Ausblick

## Bemerkungen

Statt der *punktweisen* Annahme $\lambda^{-1}|\xi|^2 \leq A(t,x)\xi\cdot\xi \leq \lambda|\xi|^2$ genügt

$$\lambda^{-1}[u,u]_{H^1} \leq \mathcal{E}_t^A(u,u) \leq \lambda[u,u]_{H^1}\,,$$

wobei

$$[u,v]_{H^1} = \int \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)\,\mathrm{d}x\,,$$
$$\mathcal{E}_t^A(u,v) = \int A(t,x)\nabla u(x)\cdot\nabla v(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

## Bemerkungen

Statt der *punktweisen* Annahme $\lambda^{-1}|\xi|^2 \leq A(t,x)\xi \cdot \xi \leq \lambda|\xi|^2$ genügt

$$\lambda^{-1}[u,u]_{H^1} \leq \mathcal{E}_t^A(u,u) \leq \lambda[u,u]_{H^1} \,,$$

wobei

$$[u,v]_{H^1} = \int \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, \mathrm{d}x \,,$$
$$\mathcal{E}_t^A(u,v) = \int A(t,x)\nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, \mathrm{d}x \,.$$

### Historisches

- Hölder-Stetigkeit für Lösungen der *zeitunabhängigen* Gleichung geht zurück auf De Giorgi (1957).
- Unabhängig davon bewies Nash 1957 ebenfalls Hölder-Stetigkeit für Lösungen der parabolischen Gleichung.
- Beweis der Moserschen Harnack-Ungleichung mit Nashs Methoden 1986 durch Fabes/Stroock.

# Anwendung: $C^\infty$-Regularität von Minimierern

Sei $F \in C^2(\mathbb{R}^d)$ konvex. Nehme an, $w$ ist Minimierer des (nichtlinearen) Variationsintegrals

$$\int F(\nabla w(x))\,\mathrm{d}x\,.$$

Dann ist $\partial_i w$ eine schwache Lösung von

$$\operatorname{div}(A_F \nabla u) = 0, \quad \text{wobei } (A_F)_{ij} = \partial_i \partial_j F(\nabla w(x))\,.$$

Unter geeigneten Annahmen an $F$ folgt also $w \in C^{1,\beta}$.

$\rightsquigarrow$ Hilberts 19. Problem wurde durch die Erkenntnisse von De Giorgi, Nash und Moser beantwortet.

1 Einleitung

2 Nichtlokale Operatoren

3 Regularitätsresultate für Gleichungen fraktioneller Ordnung

4 Ausschnitte aus dem Beweis der Harnack-Ungleichung

## 2 Nichtlokale Operatoren

Fraktioneller Laplace-Operator

Eine Klasse von nichtlokalen Operatoren

## Definition von $(-\Delta)^{\alpha/2}$

Sei $\alpha \in (0,2)$. Setze

$$(-\Delta)^{\alpha/2}u(x) = c_{d,\alpha} \lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{\mathbb{R}^d \setminus B_\varepsilon(x)} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{d+\alpha}} \,\mathrm{d}y\,,$$

wobei

$$c_{d,\alpha} = \frac{2^\alpha}{\pi^{d/2}} \frac{\Gamma\left(\frac{d+\alpha}{2}\right)}{\left|\Gamma\left(\frac{-\alpha}{2}\right)\right|}\,, \quad c_{d,\alpha} \sim \alpha(2-\alpha) \text{ für } \alpha \to 0+ \text{ bzw. } \alpha \to 2- \,.$$

## Definition von $(-\Delta)^{\alpha/2}$

Sei $\alpha \in (0,2)$. Setze

$$(-\Delta)^{\alpha/2}u(x) = c_{d,\alpha} \lim_{\varepsilon \to 0+} \int\limits_{\mathbb{R}^d \setminus B_\varepsilon(x)} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{d+\alpha}} \, \mathrm{d}y\,,$$

wobei

$$c_{d,\alpha} = \frac{2^\alpha}{\pi^{d/2}} \frac{\Gamma\left(\frac{d+\alpha}{2}\right)}{\left|\Gamma\left(\frac{-\alpha}{2}\right)\right|}\,, \quad c_{d,\alpha} \sim \alpha(2-\alpha) \text{ für } \alpha \to 0+ \text{ bzw. } \alpha \to 2- \;.$$

Normierung sorgt dafür, dass

$$\mathscr{F}((-\Delta)^{\alpha/2}u)(\xi) = |\xi|^\alpha \, \mathscr{F}u(\xi)$$

[vgl. $\quad \mathscr{F}(-\Delta u)(\xi) = |\xi|^2 \, \mathscr{F}u(\xi)\,.$]

## Eigenschaften von $(-\Delta)^{\alpha/2}$

- Für $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ und $x \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$\lim_{\alpha \to 2-} (-\Delta)^{\alpha/2} u(x) = -\Delta u(x) \quad \text{und} \quad \lim_{\alpha \to 0+} (-\Delta)^{\alpha/2} u(x) = u(x)\,.$$

# Eigenschaften von $(-\Delta)^{\alpha/2}$

- Für $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ und $x \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$\lim_{\alpha \to 2-} (-\Delta)^{\alpha/2} u(x) = -\Delta u(x) \quad \text{und} \quad \lim_{\alpha \to 0+} (-\Delta)^{\alpha/2} u(x) = u(x)\,.$$

- $\nu(\,\mathrm{d}h) = |h|^{-d-\alpha}\,\mathrm{d}h$ ist ein Lévy-Maß:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \min(1, |h|^2)\nu(\,\mathrm{d}h) < +\infty\,.$$

2 Nichtlokale Operatoren

Fraktioneller Laplace-Operator

Eine Klasse von nichtlokalen Operatoren

# Verallgemeinerung von $(-\Delta)^{\alpha/2}$

Sei $k\colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to [0,\infty]$ messbar und symmetrisch. Setze

$$\mathscr{L}u(x) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int\limits_{\mathbb{R}^d \setminus B_\varepsilon(x)} (u(x) - u(y))\, k(x,y)\, \mathrm{d}y\,.$$

Also: $\mathscr{L} = (-\Delta)^{\alpha/2}$ für $k(x,y) = c_{d,\alpha}\, |x-y|^{-d-\alpha}$

# Verallgemeinerung von $(-\Delta)^{\alpha/2}$

Sei $k\colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ messbar und symmetrisch. Setze

$$\mathscr{L}u(x) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int\limits_{\mathbb{R}^d \setminus B_\varepsilon(x)} (u(x) - u(y))\, k(x, y)\, \mathrm{d}y\,.$$

Also: $\mathscr{L} = (-\Delta)^{\alpha/2}$ für $k(x, y) = c_{d,\alpha}\, |x - y|^{-d-\alpha}$

## Gleichung fraktioneller Ordnung

$$\partial_t u(t, x) + \mathscr{L}u(t, x) = f(t, x) \qquad \text{in } Q\,.$$

Wieder gilt: Selbst wenn $k(x, y) \asymp |x - y|^{-d-\alpha}$, ist $\mathscr{L}u(x)$ für glatte $u$ nicht definiert!

$\rightsquigarrow$ Schwache Formulierung mit Bilinearform

$$\mathcal{E}^k(u, v) = \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} (u(x) - u(y))\, (v(x) - v(y))\, k(x, y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x\,.$$

# Bedingung 1 an $k(x, y)$

Sei $\lambda \geq 1$. Es gebe $\alpha \in (0, 2)$ derart, dass für alle $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $\rho \in (0, 2)$

$$\rho^{-2} \int_{|x_0 - y| \leq \rho} |x_0 - y|^2 \, k(x_0, y) \, \mathrm{d}y + \int_{|x_0 - y| > \rho} k(x_0, y) \, \mathrm{d}y \leq \lambda \rho^{-\alpha} \, .$$

## Bedingung 1 an $k(x, y)$

Sei $\lambda \geq 1$. Es gebe $\alpha \in (0, 2)$ derart, dass für alle $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $\rho \in (0, 2)$

$$\rho^{-2} \int_{|x_0 - y| \leq \rho} |x_0 - y|^2 \, k(x_0, y) \, \mathrm{d}y + \int_{|x_0 - y| > \rho} k(x_0, y) \, \mathrm{d}y \leq \lambda \rho^{-\alpha} .$$

- Gleichzeitig Integrierbarkeits- und Skalierungsbedingung an das Maß $k(x_0, y)\,\mathrm{d}y$.

## Bedingung 1 an $k(x,y)$

Sei $\lambda \geq 1$. Es gebe $\alpha \in (0,2)$ derart, dass für alle $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $\rho \in (0,2)$

$$\rho^{-2} \int_{|x_0-y|\leq\rho} |x_0-y|^2\, k(x_0,y)\,\mathrm{d}y + \int_{|x_0-y|>\rho} k(x_0,y)\,\mathrm{d}y \leq \lambda\rho^{-\alpha}\,.$$

- Gleichzeitig Integrierbarkeits- und Skalierungsbedingung an das Maß $k(x_0,y)\,\mathrm{d}y$.
- Falls $k(x,y) = K(x-y)$, dann gilt insbesondere, dass $\nu(\mathrm{d}h) = K(h)\,\mathrm{d}h$ ein Lévy-Maß ist:

$$\int \min(1,|h|^2)\nu(\mathrm{d}h) < \infty$$

# Bedingung 1 an $k(x,y)$

Sei $\lambda \geq 1$. Es gebe $\alpha \in (0,2)$ derart, dass für alle $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $\rho \in (0,2)$

$$\rho^{-2} \int_{|x_0-y|\leq\rho} |x_0-y|^2\, k(x_0,y)\,\mathrm{d}y + \int_{|x_0-y|>\rho} k(x_0,y)\,\mathrm{d}y \leq \lambda\rho^{-\alpha}\,.$$

- Gleichzeitig Integrierbarkeits- und Skalierungsbedingung an das Maß $k(x_0,y)\,\mathrm{d}y$.
- Falls $k(x,y) = K(x-y)$, dann gilt insbesondere, dass $\nu(\mathrm{d}h) = K(h)\,\mathrm{d}h$ ein Lévy-Maß ist:
$$\int \min(1,|h|^2)\nu(\mathrm{d}h) < \infty$$
- $k(x,y) \asymp |x-y|^{-d-\alpha}$ ✓

## Bedingung 2 an $k(x,y)$

Definiere

$$[u,v]_{H^{\alpha/2}(\Omega)} = (2-\alpha) \iint\limits_{\Omega\,\Omega} \frac{(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{d+\alpha}} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

$$\mathcal{E}^k_\Omega(u,v) = \iint\limits_{\Omega\,\Omega} (u(x)-u(y))\,(v(x)-v(y))\,k(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,.$$

Sei $\lambda \geq 1$. Es gebe $\alpha \in (0,2)$ derart, dass für alle $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $\rho \in (0,2)$ und $u \in H^{\alpha/2}(B_\rho(x_0))$

$$\lambda^{-1}[u,u]_{H^{\alpha/2}(B)} \leq \mathcal{E}^k_B(u,u) \leq \lambda[u,u]_{H^{\alpha/2}(B)}\,.$$

## Bedingung 2 an $k(x,y)$

Definiere

$$[u,v]_{H^{\alpha/2}(\Omega)} = (2-\alpha) \iint\limits_{\Omega\,\Omega} \frac{(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{d+\alpha}} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

$$\mathcal{E}^k_\Omega(u,v) = \iint\limits_{\Omega\,\Omega} (u(x)-u(y))\,(v(x)-v(y))\,k(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,.$$

Sei $\lambda \geq 1$. Es gebe $\alpha \in (0,2)$ derart, dass für alle $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $\rho \in (0,2)$ und $u \in H^{\alpha/2}(B_\rho(x_0))$

$$\lambda^{-1}[u,u]_{H^{\alpha/2}(B)} \leq \mathcal{E}^k_B(u,u) \leq \lambda[u,u]_{H^{\alpha/2}(B)}\,.$$

- Bedingung fordert Vergleichbarkeit der „Energien“.

## Bedingung 2 an $k(x, y)$

Definiere

$$[u, v]_{H^{\alpha/2}(\Omega)} = (2 - \alpha) \iint\limits_{\Omega\,\Omega} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{d+\alpha}} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

$$\mathcal{E}^k_\Omega(u, v) = \iint\limits_{\Omega\,\Omega} (u(x) - u(y))\,(v(x) - v(y))\,k(x, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,.$$

Sei $\lambda \geq 1$. Es gebe $\alpha \in (0, 2)$ derart, dass für alle $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $\rho \in (0, 2)$ und $u \in H^{\alpha/2}(B_\rho(x_0))$

$$\lambda^{-1}[u, u]_{H^{\alpha/2}(B)} \leq \mathcal{E}^k_B(u, u) \leq \lambda[u, u]_{H^{\alpha/2}(B)}\,.$$

- Bedingung fordert Vergleichbarkeit der „Energien“.
- $k(x, y) \asymp |x - y|^{-d-\alpha}$ ✓

## Bedingung 2 an $k(x, y)$

Definiere

$$[u, v]_{H^{\alpha/2}(\Omega)} = (2 - \alpha) \iint\limits_{\Omega\,\Omega} \frac{(u(x) - u(y))(v(x) - v(y))}{|x - y|^{d+\alpha}} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y\,,$$

$$\mathcal{E}^k_\Omega(u, v) = \iint\limits_{\Omega\,\Omega} (u(x) - u(y))\,(v(x) - v(y))\,k(x, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,.$$

Sei $\lambda \geq 1$. Es gebe $\alpha \in (0, 2)$ derart, dass für alle $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $\rho \in (0, 2)$ und $u \in H^{\alpha/2}(B_\rho(x_0))$

$$\lambda^{-1}[u, u]_{H^{\alpha/2}(B)} \leq \mathcal{E}^k_B(u, u) \leq \lambda[u, u]_{H^{\alpha/2}(B)}\,.$$

- Bedingung fordert Vergleichbarkeit der „Energien“.
- $k(x, y) \asymp |x - y|^{-d-\alpha}$ ✓
- $k$ darf aber auf (großen) Mengen auch verschwinden.

1 Einleitung

2 Nichtlokale Operatoren

3 Regularitätsresultate für Gleichungen fraktioneller Ordnung

4 Ausschnitte aus dem Beweis der Harnack-Ungleichung

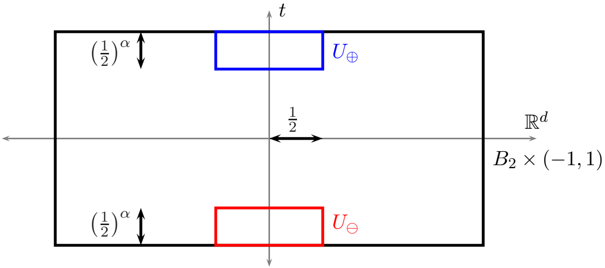
# Schwache Harnack-Ungleichung

$$\partial_t u(t,x) + \mathscr{L} u(t,x) = f(t,x) \qquad \text{in } Q. \tag{3}$$

**Satz** (Kaßmann/MF 2013)

Es gibt eine Zahl $C = C(d,\lambda) > 0$, sodass für jede Superlösung $u$ von (3) auf $Q = (-1,1) \times B_2(0)$, die auf $(-1,1) \times \mathbb{R}^d$ nichtnegativ ist, gilt:

$$\|u\|_{L^1(U_\ominus)} \leq C \left( \inf_{U_\oplus} u + \|f\|_{L^\infty(Q)} \right) .$$



## Schwache Harnack-Ungleichung

$$\partial_t u(t,x) + \mathscr{L} u(t,x) = f(t,x) \qquad \text{in } Q. \tag{3}$$

**Satz** (Kaßmann/MF 2013)

Es gibt eine Zahl $C = C(d,\lambda) > 0$, sodass für jede Superlösung $u$ von (3) auf $Q = (-1,1) \times B_2(0)$, die auf $(-1,1) \times \mathbb{R}^d$ nichtnegativ ist, gilt:

$$\|u\|_{L^1(U_\ominus)} \leq C \left( \inf_{U_\oplus} u + \|f\|_{L^\infty(Q)} \right) .$$

- Die Aussage ist robust für $\alpha \to 2-$.

## Schwache Harnack-Ungleichung

$$\partial_t u(t,x) + \mathscr{L} u(t,x) = f(t,x) \qquad \text{in } Q. \tag{3}$$

**Satz** (Kaßmann/MF 2013)

Es gibt eine Zahl $C = C(d,\lambda) > 0$, sodass für jede Superlösung $u$ von (3) auf $Q = (-1,1) \times B_2(0)$, die auf $(-1,1) \times \mathbb{R}^d$ nichtnegativ ist, gilt:

$$\|u\|_{L^1(U_\ominus)} \leq C \left( \inf_{U_\oplus} u + \|f\|_{L^\infty(Q)} \right) .$$

- Die Aussage ist robust für $\alpha \to 2-$.
- Unter den gegebenen Bedingungen an $k$ ist eine *starke* Harnack-Ungleichung für *Lösungen* nicht gültig (Bogdan/Sztonyk 2005).

## Schwache Harnack-Ungleichung

$$\partial_t u(t,x) + \mathscr{L} u(t,x) = f(t,x) \qquad \text{in } Q. \tag{3}$$

**Satz** (Kaßmann/MF 2013)

Es gibt eine Zahl $C = C(d,\lambda) > 0$, sodass für jede Superlösung $u$ von (3) auf $Q = (-1,1) \times B_2(0)$, die auf $(-1,1) \times \mathbb{R}^d$ nichtnegativ ist, gilt:

$$\|u\|_{L^1(U_\ominus)} \leq C \left( \inf_{U_\oplus} u + \|f\|_{L^\infty(Q)} \right).$$

- Die Aussage ist robust für $\alpha \to 2-$.
- Unter den gegebenen Bedingungen an $k$ ist eine *starke* Harnack-Ungleichung für *Lösungen* nicht gültig (Bogdan/Sztonyk 2005).
- Globale Nichtnegativität von $u$ ist essentiell.

# Beispiel zur Robustheit für $\alpha \to 2-$

Sei $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $\alpha_n = 2 - \frac{1}{n}$. Setze

$$k_n(x,y) = (2-\alpha_n)\,|x-y|^{-d-\alpha_n}\;,$$
$$\mathscr{L}^n(u)(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^d\setminus B_\varepsilon(0)} (u(x)-u(y))\,k_n(x,y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Sei nun $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, wobei (im schwachen Sinne)

$$\partial_t u_n(t,x) - \mathscr{L}^n u_n(t,x) \geq f(t,x) \quad \text{in } Q\,.$$

Dann gilt die Harnack-Ungleichung *uniform* für $(u_n)$.

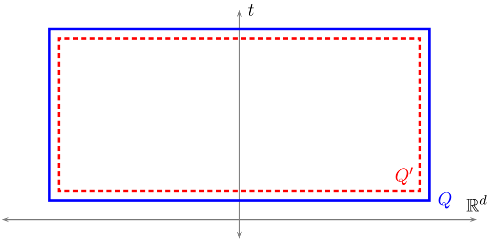
# Hölder-Stetigkeit

$$\partial_t u(t,x) + \mathscr{L} u(t,x) = f(t,x) \qquad \text{in } Q. \tag{4}$$

**Satz** (Kaßmann/MF 2013)

Es gibt eine Zahl $\beta = \beta(d,\lambda)$ derart, dass für jede Lösung $u$ von (4) in $Q = I \times \Omega$ zu $f = 0$ gilt: Für jedes $Q' \Subset Q$ gibt es $\eta(Q',Q) > 0$, sodass

$$\sup_{(t,x),(s,y)\in Q'} \frac{|u(t,x)-u(s,y)|}{\left(|x-y| + |t-s|^{1/\alpha}\right)^{\beta}} \leq \frac{\|u\|_{L^\infty(I\times\mathbb{R}^d)}}{\eta^\beta}.$$



## Hölder-Stetigkeit

$$\partial_t u(t,x) + \mathscr{L} u(t,x) = f(t,x) \qquad \text{in } Q. \tag{4}$$

**Satz** (Kaßmann/MF 2013)

Es gibt eine Zahl $\beta = \beta(d,\lambda)$ derart, dass für jede Lösung $u$ von (4) in $Q = I \times \Omega$ zu $f = 0$ gilt: Für jedes $Q' \Subset Q$ gibt es $\eta(Q', Q) > 0$, sodass

$$\sup_{(t,x),(s,y)\in Q'} \frac{|u(t,x)-u(s,y)|}{\left(|x-y|+|t-s|^{1/\alpha}\right)^{\beta}} \leq \frac{\|u\|_{L^\infty(I\times\mathbb{R}^d)}}{\eta^\beta}\,.$$

- Robust für $\alpha \to 2-$. ($|t-s|^{1/\alpha}$ kann ersetzt werden durch $|t-s|^{1/2}$)

## Hölder-Stetigkeit

$$\partial_t u(t,x) + \mathscr{L} u(t,x) = f(t,x) \qquad \text{in } Q. \tag{4}$$

**Satz** (Kaßmann/MF 2013)

Es gibt eine Zahl $\beta = \beta(d,\lambda)$ derart, dass für jede Lösung $u$ von (4) in $Q = I \times \Omega$ zu $f = 0$ gilt: Für jedes $Q' \Subset Q$ gibt es $\eta(Q',Q) > 0$, sodass

$$\sup_{(t,x),(s,y)\in Q'} \frac{|u(t,x) - u(s,y)|}{\left(|x-y| + |t-s|^{1/\alpha}\right)^{\beta}} \leq \frac{\|u\|_{L^\infty(I\times\mathbb{R}^d)}}{\eta^{\beta}} .$$

- Robust für $\alpha \to 2-$. ($|t-s|^{1/\alpha}$ kann ersetzt werden durch $|t-s|^{1/2}$)
- $\eta(Q',Q) \to 0$ für $Q' \to Q$.

## Hölder-Stetigkeit

$$\partial_t u(t,x) + \mathscr{L} u(t,x) = f(t,x) \qquad \text{in } Q. \tag{4}$$

**Satz** (Kaßmann/MF 2013)

Es gibt eine Zahl $\beta = \beta(d,\lambda)$ derart, dass für jede Lösung $u$ von (4) in $Q = I \times \Omega$ zu $f = 0$ gilt: Für jedes $Q' \Subset Q$ gibt es $\eta(Q', Q) > 0$, sodass

$$\sup_{(t,x),(s,y)\in Q'} \frac{|u(t,x) - u(s,y)|}{\left(|x-y| + |t-s|^{1/\alpha}\right)^{\beta}} \leq \frac{\|u\|_{L^\infty(I\times\mathbb{R}^d)}}{\eta^\beta}\,.$$

- Robust für $\alpha \to 2-$. ($|t-s|^{1/\alpha}$ kann ersetzt werden durch $|t-s|^{1/2}$)
- $\eta(Q', Q) \to 0$ für $Q' \to Q$.
- Beweis „Harnack $\Rightarrow$ Hölder“ komplizierter als bei Gleichungen zweiter Ordnung. Problem:

$$\sup_Q u - u \quad \text{und} \quad u - \inf_Q u\,.$$

sind lediglich in $Q$ nichtnegativ.

# Anwendung: Regularität von Minimierern

Siehe: Caffarelli, Chan und Vasseur, JAMS 2011.

Seien $F \in C^2(\mathbb{R})$ konvex, $\geq 0$ und $K\colon \mathbb{R}^d \to [0,\infty]$ messbar, $K(x) = K(-x)$. Nehme an, $w$ minimiert das (nichtlokale, nichtlineare) Variationsintegral

$$\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} F(w(y) - w(x))K(y-x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,.$$

Dann ist $\theta = \partial_i w$ schwache Lösung der (linearen) Gleichung

$$\int_{\mathbb{R}^d} F''(w(y) - w(x))(\theta(y) - \theta(x))K(y-x)\,\mathrm{d}y = 0\,.$$

Falls also $k(x,y) := F''(w(y) - w(x))K(y-x)$ „zulässig“ ist, folgt $w \in C^{1,\beta}$.

Z.B. wäre hinreichend: Es gibt $\lambda > 0$, s.d. für jedes $x \in \mathbb{R}^d$

$$\lambda \leq F''(x) \leq \lambda\,,$$
$$\lambda\,|x|^{-d-\alpha} \leq K(x) \leq \lambda\,|x|^{-d-\alpha}\,.$$

1 Einleitung

2 Nichtlokale Operatoren

3 Regularitätsresultate für Gleichungen fraktioneller Ordnung

4 Ausschnitte aus dem Beweis der Harnack-Ungleichung

## Lemma von Bombieri-Giusti

Sei $(U(r))_{1/2\leq r\leq 1}$ eine aufsteigende Familie von Mengen $U(r) \subset \mathbb{R}^{d+1}$. Fixiere $m, c_0 > 0$ und $0 < p_0 \leq \infty$. $w\colon U(1) \to [0,\infty)$ sei messbar und erfülle

$$\Big(\int\limits_{U(r)} w^{p_0}\Big)^{1/p_0} \leq \Big(\frac{c_0}{(R-r)^m}\Big)^{1/p-1/p_0} \Big(\int\limits_{U(R)} w^p\Big)^{1/p} < \infty \tag{BG1}$$

für alle $r, R \in [1/2, 1]$ und für alle $p \in (0, 1 \wedge p_0)$. Zusätzlich gelte

$$\forall s > 0\colon \quad |U(1) \cap \{\log w > s\}| \leq \frac{c_0}{s}. \tag{BG2}$$

Dann gibt es eine Zahl $C = C(m, c_0, p_0) > 0$ derart, dass

$$\Big(\int\limits_{U(1/2)} w^{p_0}\Big)^{1/p_0} \leq C\,.$$

## Die Bedingung (BG1)

$$\Big(\int_{U(r)} w^{p_0}\Big)^{1/p_0} \leq \Big(\frac{c_0}{(R-r)^m}\Big)^{1/p-1/p_0} \Big(\int_{U(R)} w^p\Big)^{1/p} < \infty \qquad \text{(BG1)}$$

Sei $u$ eine Superlösung. Setze $\widetilde{u} = u + \|f\|_{L^\infty(Q)}$. Für $\widetilde{u}$ gilt

$$\forall p > 0\colon \qquad \sup_{U(r)} \widetilde{u}^{-1} \leq \Big(\frac{C_1}{(R-r)^{d+\alpha}}\Big)^{1/p} \Big(\int_{U(R)} \widetilde{u}^{-p}(t,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big)^{1/p},$$

$$\forall p \in (0,1)\colon \int_{\widehat{U}(r)} \widetilde{u}(t,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leq \Big(\frac{C_2}{(R-r)^{\omega}}\Big)^{1/p-1} \Big(\int_{\widehat{U}(R)} \widetilde{u}^p(t,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big)^{1/p}.$$

# Die Bedingung (BG1)

$$\left(\int_{U(r)} w^{p_0}\right)^{1/p_0} \le \left(\frac{c_0}{(R-r)^m}\right)^{1/p-1/p_0} \left(\int_{U(R)} w^p\right)^{1/p} < \infty \qquad \text{(BG1)}$$

Sei $u$ eine Superlösung. Setze $\widetilde{u} = u + \|f\|_{L^\infty(Q)}$. Für $\widetilde{u}$ gilt

$$\forall p > 0: \qquad \sup_{U(r)} \widetilde{u}^{-1} \le \left(\frac{C_1}{(R-r)^{d+\alpha}}\right)^{1/p} \left(\int_{U(R)} \widetilde{u}^{-p}(t,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{1/p},$$

$$\forall p \in (0,1): \int_{\widehat{U}(r)} \widetilde{u}(t,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le \left(\frac{C_2}{(R-r)^{\omega}}\right)^{1/p-1} \left(\int_{\widehat{U}(R)} \widetilde{u}^p(t,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)^{1/p}.$$

$\rightsquigarrow$ $w = \widetilde{u}^{-1}$ erfüllt (BG1) mit $p_0 = \infty$ und $U(r) = (1-r^\alpha, 1) \times B_r$.

$\rightsquigarrow$ $\widehat{w} = \widetilde{u}$ erfüllt (BG1) mit $\widehat{p}_0 = 1$ und $\widehat{U}(r) = (-1, -1+r^\alpha) \times B_r$.

## Die Bedingung (BG2)

$$\forall s > 0: \quad |U(1) \cap \{\log w > s\}| \leq \frac{c_0}{s}. \tag{BG2}$$

Weiterhin gilt für $\widetilde{u}$, dass eine Zahl $a = a(\widetilde{u}) \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$\forall s > 0: \ |U(1) \cap \{\log \widetilde{u} < -s - a\}| \leq \frac{C}{s}\,,$$
$$\forall s > 0: |\widehat{U}(1) \cap \{\log \widetilde{u} > s - a\}\,| \leq \frac{C}{s}\,.$$

## Die Bedingung (BG2)

$$\forall s > 0: \qquad |U(1) \cap \{\log w > s\}| \leq \frac{c_0}{s}. \tag{BG2}$$

Weiterhin gilt für $\widetilde{u}$, dass eine Zahl $a = a(\widetilde{u}) \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$\forall s > 0: \ |U(1) \cap \{\log \widetilde{u} < -s - a\}| \leq \frac{C}{s},$$
$$\forall s > 0: |\widehat{U}(1) \cap \{\log \widetilde{u} > s - a\}| \leq \frac{C}{s}.$$

$\rightsquigarrow w := e^{-a}\widetilde{u}^{-1}$ und $\widehat{w} := e^{a}\widetilde{u}$ erfüllen (BG2).

## Die Bedingung (BG2)

$$\forall s > 0: \quad |U(1) \cap \{\log w > s\}| \leq \frac{c_0}{s}. \tag{BG2}$$

Weiterhin gilt für $\widetilde{u}$, dass eine Zahl $a = a(\widetilde{u}) \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$\forall s > 0: \ |U(1) \cap \{\log \widetilde{u} < -s - a\}| \leq \frac{C}{s},$$
$$\forall s > 0: |\widehat{U}(1) \cap \{\log \widetilde{u} > s - a\}| \leq \frac{C}{s}.$$

$\rightsquigarrow w := e^{-a}\widetilde{u}^{-1}$ und $\widehat{w} := e^{a}\widetilde{u}$ erfüllen (BG2).

---

„Nichtlokale Rechenregel“:

$$-\mathcal{E}(w, \psi^2 w^{-1}) \geq \int_{B_R}\int_{B_R} \psi(x)\psi(y) \left(\log \frac{w(t,y)}{\psi(y)} - \log \frac{w(t,x)}{\psi(x)}\right)^2 k(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y - 3\,\mathcal{E}(\psi,\psi)$$

Vergleiche:

$$-\int \nabla w \cdot \nabla(\psi^2 w^{-1}) = -\int 2\psi w^{-1} \nabla w \cdot \nabla \psi + \int w^{-2}\psi^2 |\nabla w|^2$$
$$\geq -2\int |\nabla \psi|^2 + \frac{1}{2}\int \psi^2 |\nabla(\log w)|^2.$$

## Der Schluss

$$\Big( \int_{U(1/2)} w^{p_0} \Big)^{1/p_0} \leq C \,.$$

Aus dem Lemma von Bombieri-Giusti folgt

$$\sup_{U(1/2)} w = e^{-a} \sup_{U(1/2)} \widetilde{u}^{-1} \leq C, \quad \text{und}$$

$$\|\widehat{w}\|_{L^1(\widehat{U}(1/2))} = e^a \, \|\widetilde{u}\|_{L^1(\widehat{U}(1/2))} \leq \widehat{C} \,.$$

Daher

$$\|\widetilde{u}\|_{L^1(\widehat{U}(1/2))} \leq C\,\widehat{C} \left( \sup_{U(1/2)} \widetilde{u}^{-1} \right)^{-1},$$

und schließlich

$$\|u\|_{L^1(U_\ominus)} \leq \|\widetilde{u}\|_{L^1(U_\ominus)} \leq C\,\widehat{C} \left( \sup_{U_\oplus} \widetilde{u}^{-1} \right)^{-1} \leq C\,\widehat{C} \left( \inf_{U_\oplus} u + \|f\|_{L^\infty(Q)} \right).$$