

Einführung in die Programmiersprachen C und C++

Markus Kirschmer, Fakultät für Mathematik

Übungsblatt 8

Eine Klasse in C++, rationale Zahlen

Die rationale Zahlen lassen sich in C++ implementieren, so daß exakte Bruchrechnung möglich wird. Die rationalen Zahlen werden als gekürzte Brüche verwaltet.

Achtung: Keine Überlaufkontrolle. Die Zähler und Nenner können rasch sehr groß werden!

```
// ratio.cc -- Rationale Zahlen
#include <stdio.h>
#include <iostream>
#include <iomanip>
using namespace std;

typedef long long Int;

Int ggt(Int a, Int b) {
    a = (a<0) ? -a : a;
    b = (b<0) ? -b : b;
    while (b) { Int c = a % b; a = b; b = c; }
    return a;
}

class ratio {
    Int z; Int n;
    void norm(); // private Element-Funktion, normalisiert durch Kuerzen.
public:
    ratio(Int zz = 0, Int nn = 1) { z = zz; n = nn; norm(); };
    friend ratio operator+(ratio, ratio);
    friend ratio operator-(ratio, ratio);
    friend ratio operator*(ratio, ratio);
    friend ratio operator/(ratio a, ratio b) { return a*b.inv(); }
    friend ostream& operator<<(ostream& , ratio);
    friend istream& operator>>(istream& , ratio&);
    // Unaere Operatoren:
    ratio operator++() { z += n; return *this; } // Prefix
    ratio operator++(int) { ratio r = *this; z += n; return r; } // Postfix
    ratio operator+=(ratio r) { z = z*r.n + r.z*n, n = n*r.n; norm();
        return *this; }

    // Member-Funktionen:
    ratio inv() { return ratio(n,z); }
    operator double() { return (double)z/(double)n; } // cast auf double
};

ratio operator+(ratio a, ratio b) {
    return ratio( a.z*b.n + b.z*a.n , a.n*b.n );
}

ratio operator-(ratio a, ratio b) {
    return ratio( a.z*b.n - b.z*a.n , a.n*b.n );
}

ratio operator*(ratio a, ratio b) {
    Int d,zz,nn;
    if (a.z == 0 || b.z == 0) return ratio(0,1);
```

```
if (a.n == 0 || b.n == 0) return ratio(1,0);
// "kreuzweise" kuerzen:
if ( (d=ggt(a.z, b.n)) != 1) { a.z /= d; b.n /= d; }
if ( (d=ggt(a.n, b.z)) != 1) { a.n /= d; b.z /= d; }
return ratio( a.z*b.z, a.n*b.n );
}

inline void ratio::norm() {
    Int d;
    if (n) {
        if ( n < 0 ) { n = -n; z = -z; }
        if ( (d = ggt(z,n)) != 1) { z /= d; n /= d; }
    }
    else z = 1; // Infty: Nenner = 0
}

ostream& operator<<(ostream& os, ratio a) {
    return os << a.z << '/' << a.n;
}

istream& operator>>(istream& is, ratio& a) {
    is >> a.z >> a.n; a.norm();
    return is;
}

int main() {
    ratio r, s, t;
    cout << "z n : "; cin >> r;
    cout << " r : " << r << "\n";
    cout << (double)r << endl;
    t = ++r;
    cout << t << '\n';
    cout << t++ << '\n';
    cout << t << '\n';
    cout << ++t << '\n';
    cout << "z n : "; cin >> s;
    cout << " s : " << s << "\n";
    cout << "Summe: \t" << r+s << '\n';
    cout << "Diff: \t" << r-s << '\n';
    cout << "Prod: \t" << r*s << '\n';
    cout << "Quot: \t" << r/s << '\n';
    cout << r << " dividiert durch " << s << " = " << r/s << '\n';
    r += s;
    cout << "r += s = " << r << '\n';
    r += (Int)17;
    cout << "r += 17 = " << r << '\n';
    while (1) {
        ratio a = ratio(1,1);
        Int i,n;
        cout << "n : "; cin >> n;
        for (i=2; i<=n; i++) {
            a += ratio(1,i);
        }
        cout << "1 + 1/2 + ... + 1/" << n << " = " << a << '\n';
    }
}
```

Aufgabe 8.1. Implementieren Sie die Operatoren `==`, `!=`, `<`, `<=`, `>`, `>=`, `--` (Pre- und Post-Variante) sowie alle Zuweisungsoperatoren wie `=`, `*` usw.

Klassen-Templates in C++, komplexe Zahlen

Man kann die Struktur der komplexen Zahlen etwa wie folgt als Klasse implementieren:

```
class complex {
    double r; double i;
public:
    ...
}
```

Dies impliziert, daß man auf den Komponenten-Typ `double` festgelegt ist. Will man `float` oder `int` als Komponenten, muß man eine weitere Klasse festlegen. Einfacher wird dies durch ein *Klassentemplate*:

```
template <class REAL>
class complex {
    REAL r; REAL i;
public
    ...
}
```

Dann hat man mit `complex<double>`, `complex<float>`, `complex<int>` usw. verschiedene `complex`-Typen zur Verfügung, die als Real-Bestandteile jeden adäquaten Typ erlauben. Allerdings gibt es für manche Situationen Probleme. Wenn zum Beispiel die Betragsfunktion `REAL abs(complex z)` implementiert ist, wird im Fall `complex<int>` hier `REAL` durch `int` ersetzt, was ziemlich unzuweckmäßig ist.

Templates erlauben aber mehrere formale Typbezeichner als Argumente:

```
template <class REAL, class FLOAT>
class complex {
    REAL r; REAL i;
public
    ...
    friend FLOAT abs(const complex c){ return sqrt(x.r*x.r+x.i*x.i); }
    ...
}
```

Die Typbezeichnung lautet dann z.B. `complex<int,double>` usw., und die Funktion `abs` liefert auch für den komplexen Typ mit `int`-Koeffizienten den Typ `double` zurück.

Die Datei `complex.cc` bietet eine Implementation, die hier im einzelnen kommentiert wird:

```
// complex.cc
#include <iostream>
#include <iomanip>
#include <math.h>
#define PI 3.14159265358979323846
template <class REAL, class FLOAT>
class complex {
    REAL r; REAL i;
public:
    complex() {}
    complex(REAL re, REAL im = 0) { r=re; i=im;}
};
```

Die Initialisierung `im = 0` bedeutet, daß eine Initialisierung mit nur einer Variablen `v = complex(5)`; zulässig ist und die gleiche Bedeutung hat wie `v = complex(5,0)`; Die Komponente `im` wird also per Default auf 0 initialisiert.

Es folgen die arithmetischen Operationen inklusive Zuweisungs-Operatoren. Hier werden aus Effizienzgründen jeweils im Fall von komplexen Argumenten Referenzen auf die Klassen übergeben. D.h., für jeden Aufruf sind statt der Argumente (2 `REAL`-Objekte) nur jeweils eine Adresse an die Funktion zu übergeben. Dadurch,

daß man die Argumente als `const` deklariert, wird verhindert, daß diese selbst versehentlich modifiziert werden, was bei beliebigen Referenzen natürlich denkbar wäre.

```
complex operator+=(const complex& y) { // Member-Funktion
    r += y.r; i += y.i; return *this; }
complex operator+=(REAL y) { r += y; return *this; }
```

Es ist zweckmäßig, die Fälle, daß eines der Argumente vom Typ `REAL` ist, gesondert zu betrachten und die Operatoren oder Funktionen entsprechend zu überladen, wie im letzten Beispiel. Andernfalls würde etwa bei einer Zuweisung von Typ

```
double u = 1, complex<double,double> v; v += u;
```

implizit immer noch die zweite Konstruktor-Funktion aufgerufen, die für die Umwandlung `double --> complex<...,>` zuständig ist.

Die Zuweisungs-Operatoren `+=`, `-=` usw. werden hier sämtlich als *Member-Funktionen* implementiert. Dies ist natürlich, da in `v += u` ja der linke Operand `v` modifiziert wird. Er erscheint also in der Implementation als das implizite Argument.

```
friend complex operator+(const complex& x, const complex& y) {
    return complex(x.r+y.r, x.i+y.i); }
friend complex operator+(const complex& x, REAL y) {
    return complex(x.r+y, x.i); }
friend complex operator+(REAL x, const complex& y) {
    return complex(x+y.r, y.i); }
```

Die binären Operatoren sind als `friend`-Funktionen implementiert, da bei ihren Anwendungen, etwa in `w = u + v`; `w = u - v`; usw. immer zwei gleichberechtigte Operanden `u,v` auftreten, die in der Regel auch nicht modifiziert werden.

Bei den binären multiplikativen Funktionen sind Effizienzbetrachtungen noch wichtiger:

```
friend complex operator*(const complex& x, const complex& y) {
    return complex(x.r*y.r-x.i*y.i, x.r*y.i+x.i*y.r); }
friend complex operator*(const complex& x, REAL y) {
    return complex(x.r*y, x.i*y); }
friend complex operator*(REAL x, const complex& y) {
    return complex(x*y.r, x*y.i); }
```

In der ersten Funktion werden vier `REAL`-Multiplikationen ausgeführt, in der zweiten und dritten jeweils nur zwei. Das `REAL`-Argument kann man direkt übergeben, da durch Verwendung einer Referenz jedenfalls für elementare Typen wie `double`, `float` und `int` keine Zeitersparnis erzielt würde. Allerdings ergäbe sich ein Unterschied, wenn man etwa als `REAL` eine selbstentworfenen Klasse rationaler Zahlen (bestehend aus den beiden `int`-Komponenten *Zähler* und *Nenner*) verwenden würde.

Die weiteren Funktionen werden ähnlich behandelt.

Aufgabe 8.2. Überladen Sie die Funktionen `double pow(double,double)` aus der Standard-Bibliothek in mathematisch sinnvoller Weise zu `complex pow(complex,complex)` (siehe Def. des Operators $\hat{\sim}$ unten). Verfahren Sie ähnlich mit anderen Funktionen der Standard-Bibliothek wie `exp`, `sin`, `cos`, `log` usw. (cf. man `exp`.)

Wir betrachten noch die logischen Operatoren und den Ausgabeoperator:

```
friend bool operator==(const complex& x, const complex& y) {
    return (x.r==y.r && x.i==y.i); }
friend bool operator==(const complex& x, REAL y) {
    return (x.i == 0 && x.r==y); }
friend bool operator==(REAL x, const complex& y) {
    return (y.i == 0 && x==y.r); }
```

```

friend bool operator!=(const complex& x, const complex& y) {
    return (x.r!=y.r || x.i!=y.i); }
friend bool operator!=(const complex& x, REAL y) {
    return (x.r!=y || x.i!=0); }
friend bool operator!=(REAL x, const complex& y) {
    return (x!=y.r || y.i!=0); }
friend ostream& operator<<(ostream& os, const complex& z) {
    os<<setw(6)<<setprecision(3)<< z.r;
    os << ( z.i>=0 ? " + " : " - ");
    os<<setw(6)<<setprecision(3)<< ( z.i>=0 ? z.i : -z.i ) <<'i';
    return os; }
};

```

Für den Logarithmus und zum Potenzieren komplexer Zahlen benötigt man die Eulersche Formel

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$$

die sich aus den Potenzreihen für Exponential-Funktion, Sinus- und Cosinus-Funktion ergibt.

Für die Berechnung des komplexen Logarithmus verwenden wir die Beziehung $\log(zz') = \log(z) + \log(z')$ (die mit der Potenzreihenentwicklung der Logarithmusfunktion gezeigt wird), angewandt auf die Zerlegung

$$z = |z| \cdot \frac{z}{|z|} = |z| \cdot e^{i \arg(z)}.$$

Logarithmieren ergibt damit $\log(z) = \log|z| + i \arg(z)$. Diese Formel begründet

```

friend complex log(complex z) { return complex(log(abs(z)),arg(z)); }

```

Zum Berechnen *komplexer Potenzen* schreiben wir für zwei komplexe Zahlen u, v :

$$u^v = e^{v \log(u)} = e^{\operatorname{Re}(v \log(u)) + i \operatorname{Im}(v \log(u))} = e^{\operatorname{Re}(v \log(u))} \cdot e^{i \operatorname{Im}(v \log(u))}.$$

Der linke Faktor ist eine übliche reelle Potenz während man den linken Faktor über die Eulerformel auswertet.

Als Programmcode erhalten wir:

```

friend complex operator^(complex u, complex v) {
    complex z = v*log(u);
    REAL a = exp(z.r);
    return complex(a*cos(z.i), a*sin(z.i));
}

```

Aufgabe 8.3. Überladen Sie auch den Eingabeoperator `>>` für die Klassen `complex<...>` und schreiben Sie ein Testprogramm, das es erlaubt, die von Ihnen implementierten Funktionen interaktiv zu testen.

Man sollte die am häufigsten verwendeten Typen per `typedef` abkürzen:

```

typedef complex<float,double> complex_f;
typedef complex<double,double> complex_d;
typedef complex<int,double> complex_i;

```

Bemerkung: Ein Cast zwischen zwei durch das gleiche Template definierten Typen ist nicht möglich.

Aufgabe 8.4. Definieren Sie eine Ordnung `<` auf den komplexen Zahlen und sortieren Sie ein Array von komplexen Zahlen mittels `quicksort` wie in Übungsblatt 7.

Aufgabe 8.5. Benutzen Sie die Klasse `class ratio { Int z; Int n; }` rationaler Zahlen, um eine Klasse rationaler komplexer Zahlen zu definieren.

Hinweis: Denken Sie daran, die `REAL`-Argumente in der Klasse `complex` für diesen Fall zu Referenzen zu machen. Ist dies ohne Änderung des Klassen-templates `complex` möglich?

```

// complex.cc
#include <iostream>
#include <iomanip>
#include <math.h>
using namespace std;
#define PI 3.14159265358979323846
#define E 2.71828182845904523536

template <class T>
T absval(T x) { return (x >= 0) ? x : -x;}

template <class REAL, class FLOAT>
class complex {
    REAL r; REAL i;
public:
    complex() {};
    complex(REAL re, REAL im = 0) { r=re; i=im;}
    // Addition:
    complex operator+=(const complex& y) { // Member-Funktion
        r += y.r; i += y.i; return *this; }
    complex operator+=(REAL y) { r += y; return *this; }
    friend complex operator+(const complex& x, const complex& y) {
        return complex(x.r+y.r, x.i+y.i); }
    friend complex operator+(const complex& x, REAL y) {
        return complex(x.r+y, x.i); }
    friend complex operator+(REAL x, const complex& y) {
        return complex(x+y.r, y.i); }
    // Subtraktion:
    complex operator-=(const complex& y) { // Member-Funktion
        r -= y.r; i -= y.i; return *this; }
    complex operator-=(REAL y) { r -= y; return *this; }
    friend complex operator-(const complex& x, const complex& y) {
        return complex(x.r-y.r, x.i-y.i); }
    friend complex operator-(const complex& x, REAL y) {
        return complex(x.r-y, x.i); }
    friend complex operator-(REAL x, const complex& y) {
        return complex(x-y.r, -y.i); }
    friend complex operator-(const complex& x) {
        return complex(-x.r, -x.i); }
    // Multiplikation:
    complex operator*=(const complex& y) {
        REAL rr = r*y.r-i*y.i; i = r*y.i+i*y.r; r = rr; return *this; }
    complex operator*=(REAL y) { r *= y; i *= y; return *this; }
    friend complex operator*(const complex& x, const complex& y) {
        return complex(x.r*y.r-x.i*y.i, x.r*y.i+x.i*y.r); }
    friend complex operator*(const complex& x, REAL y) {
        return complex(x.r*y, x.i*y); }
    friend complex operator*(REAL x, const complex& y) {
        return complex(x*y.r, x*y.i); }
    // Division:
    complex operator/=(const complex& y) {
        REAL a = y.r*y.r + y.i*y.i; REAL rr = (r*y.r+i*y.i)/a;
        i = (i*y.r-r*y.i)/a; r = rr; return *this; }
    complex operator/=(REAL y) { r /= y; i /= y; return *this; }
    friend complex operator/(const complex& x, const complex& y) {

```

```

    REAL a = y.r*y.r + y.i*y.i;
    return complex((x.r*y.r+x.i*y.i)/a, (x.i*y.r-x.r*y.i)/a); }
friend complex operator/(const complex& x, REAL y) {
    return complex(x.r/y, x.i/y); }
friend complex operator/(REAL x, const complex& y) {
    REAL a = y.r*y.r + y.i*y.i; x/=a;
    return complex(x*y.r, -x*y.i); }
friend complex inv(complex z) {
    REAL a = z.r*z.r + z.i*z.i;
    return complex(z.r/a,-z.i/a);
}
// Absolutbetrag, Argument:
friend FLOAT abs(const complex& x) {
    return sqrt(x.r*x.r+x.i*x.i); }
friend FLOAT arg(const complex& x) {
    if (x.r == 0) return (x.i == 0) ? 0 : ( x.i > 0 ? 0.5*PI : 1.5*PI);
    if (x.r < 0) return atan(x.i/x.r) + PI;
    // x.r > 0 :
    return (x.i >= 0) ? atan(x.i/x.r) : atan(x.i/x.r) + 2*PI ;
}
friend FLOAT warg(const complex& x) { return arg(x)/PI*180; }
// Wurzel:
friend complex sqrt(const complex& x) {
    FLOAT a = arg(x)/2, b = sqrt(abs(x));
    return complex( REAL(cos(a)*b), REAL(sin(a)*b)); }
// Potenzieren: Achtung: Nach der Prioritaetenliste fuer
// Operatoren hat der Operator ^ nicht die Prioritaet, die man fuer das
// Potenzieren erwartet, man muss also klammern: (u^v) * w
friend complex log(complex z) {
    return complex(log(abs(z)),arg(z));
}
friend complex operator^(complex u, complex v) {
    complex z = v*log(u); REAL a = exp(z.r);
    return complex(a*cos(z.i), a*sin(z.i));
}
friend complex operator^(complex z, REAL d) { return z^complex(d); }
friend complex operator^(REAL u, complex z) { return complex(u)^z; }
// Boolesche Operatoren:
friend bool operator==(const complex& x, const complex& y) {
    return (x.r==y.r && x.i==y.i); }
friend bool operator==(const complex& x, REAL y) {
    return (x.i == 0 && x.r==y); }
friend bool operator==(REAL x, const complex& y) {
    return (y.i == 0 && x==y.r); }
friend bool operator!=(const complex& x, const complex& y) {
    return (x.r!=y.r || x.i!=y.i); }
friend bool operator!=(const complex& x, REAL y) {
    return (x.r!=y || x.i!=0); }
friend bool operator!=(REAL x, const complex& y) {
    return (x!=y.r || y.i!=0); }
// Ausgabeoperator:
friend ostream& operator<<(ostream& os, const complex z) {
    REAL rr, ii;
    rr = z.r; ii = z.i;
    if ( absval(rr) < 1.0e-15) rr=0;

```

```

    if ( absval(ii) < 1.0e-15) ii=0;
    if (ii == 0.0) {
        os<<setw(6)<<setprecision(2)<< rr;
        os<<" "; os<<setw(6)<<setprecision(2)<< ' ';
        return os;
    }
    if (rr == 0.0) {
        os<<setw(6)<<' '<<" ";
        os<<setw(6)<<setprecision(2)<< ii << 'i';
        return os;
    }
    os<<setw(6)<<setprecision(2)<< rr;
    os << ( ii>0 ? " + ":" - ");
    os<<setw(6)<<setprecision(2)<< ( ii>0 ? ii : -ii ) << 'i';
    return os; }
}; // Jetzt hat man z. B. folgende Moeglichkeiten:
typedef complex<float,double> complex_f;
typedef complex<double,double> complex_d;
typedef complex<long double,long double> complex_ld;
typedef complex<int,double> complex_i;
typedef complex_ld comp;
int main() {
    comp u,v;
    v = u = sqrt(sqrt(comp(0, 1))); // 4-te Wurzel aus i
    cout << u << '\n';
    cout << "\n";
    for (int i=0; i<16; i++) {
        cout << u << " hoch " << setw(2) << i+1 << " : " << v << " warg = ";
        cout << setw(6) << setprecision(4) << warg(v) << "\n";
        v *= u;
    }
    cout << "\n";
    v = u = 1/u;
    for (int i=0; i<16; i++) {
        cout << u << " hoch " << setw(2) << i+1 << " : " << v << " warg = ";
        cout << setw(6) << setprecision(4) << warg(v) << "\n";
        v *= u;
    }
    cout << "\n";
    cout << " e ^ (2 pi i) = " << ( comp(E,0)^comp(0, 2*PI) ) << '\n';
    cout << " e ^ (pi i) = " << ( E^comp(0, PI) ) << '\n';
    cout << " e ^ (pi/2 i) = " << ( E^comp(0, PI)/comp(2) ) << '\n';
    cout << " e ^ (pi/4 i) = " << ( E^comp(0, PI)/comp(4) ) << '\n';
    cout << " e ^ (pi/8 i) = " << ( E^comp(0, PI)/comp(8) ) << '\n';
    cout << " i ^ i = " << ( comp(0,1)^comp(0,1) ) << '\n';
    cout << " e ^ (-pi/2) = " << ( comp(E,0)^comp(-PI/2,0) ) << '\n';
    cout << "-1 ^ 0.5 = " << ( comp(-1,0)^comp(.5,0) ) << '\n';
    cout << "-2i ^ 0.5 = " << ( comp(0,-2)^comp(.5,0) ) << '\n';
    cout << " 2i ^ 0.5 = " << ( comp(0,2)^comp(.5,0) ) << '\n';
}

```