Spieß

1. Übung zur Vorlesung Algebra 1

Sommersemester 2010 Abgabe: Do, 29.4.10

Aufgabe 1. Sei G eine Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe vom Index 2. Zeigen Sie, dass H ein Normalteiler ist.

Aufgabe 2. (a) Sei G eine Gruppe und H eine nicht-leere Teilmenge von G. Zeigen Sie:

(a) H ist genau dann eine Untergruppe von G ist, wenn gilt $ab^{-1} \in H$ für alle $a, b \in H$.

(b) Ist H endlich, so ist H geneu dann eine Untergruppe, wenn für alle $a, b \in H$ gilt $ab \in H$.

Aufgabe 3. Sei G eine Gruppe. Das Zentrum Z von G ist die Menge

$$Z = \{a \in G \mid ab = ba \text{ für alle } b \in G\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Z ist ein Normalteiler von G.

(b) Ist G/Z zyklisch, so ist G abelsch.

Aufgabe 4. Sei G eine Gruppe. Der *Kommutator* $[a, b]$ von zwei Elementen $a, b \in G$ ist durch $[a, b] \colon = aba^{-1}b^{-1}$ definiert. Sei

$$[G, G] \colon =< \{[a, b] \mid a, b \in G\} >$$

die von allen Kommutatoren erzeugte Untergruppe von G. Zeigen Sie:

(a) $[G, G]$ ist ein Normalteiler von G und die Faktorgruppe $G^{\mathrm{ab}} \colon = G/[G, G]$ ist abelsch.

(b) G^{ab} zusammen mit der kanonischen Projektion $\pi : G \to G^{\mathrm{ab}}, a \mapsto a[G, G]$ besitzt die folgende *universelle Eigenschaft*: Zu jedem Gruppenhomomorphismus $\phi : G \to A$ von G in eine abelsche Gruppe A gibt es einen eindeutig bestimmten Gruppenhomomorphismus $\overline{\phi} : G^{\mathrm{ab}} \to A$, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} G \arrow[dr, "\phi"] \arrow[dd, "\pi"'] & \\ & A \\ G^{\mathrm{ab}} \arrow[ur, "\overline{\phi}"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert, d.h. es gilt $\phi = \overline{\phi} \circ \pi$.

Aufgabe 5. Sei $M_2(\mathbb{Z})$ die Menge der 2×2–Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{Z}$ und $O(2) \colon = \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \mid A^t A = E_2 = AA^t\}$ die Gruppe der orthogonalen 2×2–Matrizen. Zeigen Sie:

(a) $G \colon = M_2(\mathbb{Z}) \cap O(2)$ ist eine Gruppe der Ordnung 8.

(b) G besitzt genau eine zyklische Untergruppe G_0 der Ordnung 4.

(c) Für alle $d \in G_0$ und $s \in G - G_0$ gilt $ds = sd^{-1}$.