

# 1. Übung zur Vorlesung Algebra 1

Sommersemester 2010

Abgabe: Do, 29.4.10

**Aufgabe 1.** Sei  $G$  eine Gruppe und  $H \subset G$  eine Untergruppe vom Index 2. Zeigen Sie, dass  $H$  ein Normalteiler ist.

**Aufgabe 2.** (a) Sei  $G$  eine Gruppe und  $H$  eine nicht-leere Teilmenge von  $G$ . Zeigen Sie:

(a)  $H$  ist genau dann eine Untergruppe von  $G$  ist, wenn gilt  $ab^{-1} \in H$  für alle  $a, b \in H$ .

(b) Ist  $H$  endlich, so ist  $H$  genau dann eine Untergruppe, wenn für alle  $a, b \in H$  gilt  $ab \in H$ .

**Aufgabe 3.** Sei  $G$  eine Gruppe. Das Zentrum  $Z$  von  $G$  ist die Menge

$$Z = \{a \in G \mid ab = ba \text{ für alle } b \in G\}.$$

Zeigen Sie:

(a)  $Z$  ist ein Normalteiler von  $G$ .

(b) Ist  $G/Z$  zyklisch, so ist  $G$  abelsch.

**Aufgabe 4.** Sei  $G$  eine Gruppe. Der *Kommutator*  $[a, b]$  von zwei Elementen  $a, b \in G$  ist durch  $[a, b] := aba^{-1}b^{-1}$  definiert. Sei

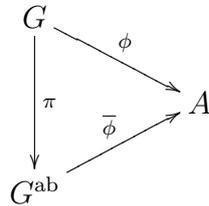
$$[G, G] := \langle \{[a, b] \mid a, b \in G\} \rangle$$

die von allen Kommutatoren erzeugte Untergruppe von  $G$ . Zeigen Sie:

(a)  $[G, G]$  ist ein Normalteiler von  $G$  und die Faktorgruppe  $G^{\text{ab}} := G/[G, G]$  ist abelsch.

(b)  $G^{\text{ab}}$  zusammen mit der kanonischen Projektion  $\pi : G \rightarrow G^{\text{ab}}, a \mapsto a[G, G]$  besitzt die folgende *universelle Eigenschaft*: Zu jedem Gruppenhomomorphismus  $\phi : G \rightarrow A$  von  $G$  in eine abelsche Gruppe  $A$  gibt es einen eindeutig

bestimmten Gruppenhomomorphismus  $\bar{\phi} : G^{\text{ab}} \rightarrow A$ , so dass das Diagramm



kommutiert, d.h. es gilt  $\phi = \bar{\phi} \circ \pi$ .

**Aufgabe 5.** Sei  $M_2(\mathbb{Z})$  die Menge der  $2 \times 2$ -Matrizen mit Einträgen in  $\mathbb{Z}$  und  $O(2) := \{A \in \text{GL}_2(\mathbb{R}) \mid A^t A = E_2 = A A^t\}$  die Gruppe der orthogonalen  $2 \times 2$ -Matrizen. Zeigen Sie:

- (a)  $G := M_2(\mathbb{Z}) \cap O(2)$  ist eine Gruppe der Ordnung 8.
- (b)  $G$  besitzt genau eine zyklische Untergruppe  $G_0$  der Ordnung 4.
- (c) Für alle  $d \in G_0$  und  $s \in G - G_0$  gilt  $ds = sd^{-1}$ .