

1. Übung zur Vorlesung Algebra 1

Sommersemester 2010

Abgabe: Do, 29.4.10

Aufgabe 1. Sei G eine Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe vom Index 2. Zeigen Sie, dass H ein Normalteiler ist.

Aufgabe 2. (a) Sei G eine Gruppe und H eine nicht-leere Teilmenge von G . Zeigen Sie:

(a) H ist genau dann eine Untergruppe von G ist, wenn gilt $ab^{-1} \in H$ für alle $a, b \in H$.

(b) Ist H endlich, so ist H genau dann eine Untergruppe, wenn für alle $a, b \in H$ gilt $ab \in H$.

Aufgabe 3. Sei G eine Gruppe. Das Zentrum Z von G ist die Menge

$$Z = \{a \in G \mid ab = ba \text{ für alle } b \in G\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Z ist ein Normalteiler von G .

(b) Ist G/Z zyklisch, so ist G abelsch.

Aufgabe 4. Sei G eine Gruppe. Der *Kommutator* $[a, b]$ von zwei Elementen $a, b \in G$ ist durch $[a, b] := aba^{-1}b^{-1}$ definiert. Sei

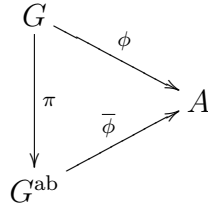
$$[G, G] := \langle \{[a, b] \mid a, b \in G\} \rangle$$

die von allen Kommutatoren erzeugte Untergruppe von G . Zeigen Sie:

(a) $[G, G]$ ist ein Normalteiler von G und die Faktorgruppe $G^{\text{ab}} := G/[G, G]$ ist abelsch.

(b) G^{ab} zusammen mit der kanonischen Projektion $\pi : G \rightarrow G^{\text{ab}}, a \mapsto a[G, G]$ besitzt die folgende *universelle Eigenschaft*: Zu jedem Gruppenhomomorphismus $\phi : G \rightarrow A$ von G in eine abelsche Gruppe A gibt es einen eindeutig

bestimmten Gruppenhomomorphismus $\bar{\phi} : G^{\text{ab}} \rightarrow A$, so dass das Diagramm



kommutiert, d.h. es gilt $\phi = \bar{\phi} \circ \pi$.

Aufgabe 5. Sei $M_2(\mathbb{Z})$ die Menge der 2×2 -Matrizen mit Einträgen in \mathbb{Z} und $O(2) := \{A \in \text{GL}_2(\mathbb{R}) \mid A^t A = E_2 = A A^t\}$ die Gruppe der orthogonalen 2×2 -Matrizen. Zeigen Sie:

- (a) $G := M_2(\mathbb{Z}) \cap O(2)$ ist eine Gruppe der Ordnung 8.
- (b) G besitzt genau eine zyklische Untergruppe G_0 der Ordnung 4.
- (c) Für alle $d \in G_0$ und $s \in G - G_0$ gilt $ds = sd^{-1}$.