Spieß

11. Übung zur Vorlesung Algebra 1

Sommersemester 2010 Abgabe: Do, 15.7.10

Aufgabe 1. Sei K ein Körper und sei $\overline{K}$ ein algebraischer Abschluss von K. Zeigen Sie: Ist K abzählbar, so ist auch $\overline{K}$ abzählbar.

Aufgabe 2. Sei k ein Körper, K/k eine endliche Körpererweiterung und sei $\overline{k}$ ein algebraischer Abschluss von k. Sei $\mathrm{Hom}_k(K, \overline{k})$ die Menge aller Körperhomomorphismen $\phi : K \to \overline{k}$ mit $\phi(x) = x$ für alle $x \in k$. Die Zahl $[K : k]_s : = \sharp(\mathrm{Hom}_k(K, \overline{k}))$ heisst der Separabilitätsgrad von K/k. Zeigen Sie:

(a) $[K : k]_s$ ist ein Teiler von $[K; k]$.

(b) Es gilt $[K : k]_s = [K : k]$ genau dann, wenn K/k separabel ist.

(c) Sei L/K eine weitere endliche Erweiterung. Dann gilt

$$[K : k]_s \; [L : K]_s = [L : k]_s.$$

Aufgabe 3. Ziel dieser Aufgabe ist den Fundamentalsatz der Algebra zu beweisen. Dabei soll der folgende Satz benutzt werden, der noch im Verlauf der Vorlesung bewiesen wird:

Satz (Sylow): *Sei G eine endliche Gruppe, p eine Primzahl und $m \in \mathbb{N}$, so dass p^m ein Teiler der Gruppenordnung von G ist. Dann gibt es eine Untergruppe H von G der Ordnung p^m.*

(a) Zeigen Sie, dass jedes Polynom $f \in \mathbb{R}[X]$ ungeraden Grades eine Nullstelle in $\mathbb{R}$ besitzt. (Hinweis: Zwischenwertsatz).

(b) Sei $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass ein $w \in \mathbb{C}$ existiert mit $w^2 = z$. Schliessen Sie, dass $\mathbb{C}$ keine Erweiterung vom Grad 2 besitzt (Hinweis: Polarkoordinatendarstellung).

(c) Sei $K/\mathbb{C}$ eine endliche Erweiterung, die galoissch über $\mathbb{R}$ ist. Zeigen Sie, dass gilt $K = \mathbb{C}$ (Hinweis: Zeigen Sie zunächst mit Hilfe von (a) und dem

Satz von Sylow, dass gilt $[K : \mathbb{R}] = 2^m$ für ein $m \geq 2$. Benutzen Sie dann (b) und den Satz von Sylow um $K = \mathbb{C}$ zu schliessen).

(d) Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist.