Spieß

3. Übung zur Vorlesung Algebra 1

Sommersemester 2010 Abgabe: Mi, 12.5.10

Aufgabe 1. Sei R ein kommutativer Ring mit 1.

(a) Zeigen Sie: Ist jedes Hauptideal ein Primideal, so ist R ein Körper.

(b) Sei $\mathfrak{p} \subseteq R$ ein Primideal und $\mathfrak{p}R[X]$ das von $\mathfrak{p}$ in $R[X]$ erzeugte Ideal (d.h. es gilt $\mathfrak{p}R[X] = \{f = \sum_{i=0}^n a_i X^i \mid a_i \in \mathfrak{p}\ \forall i\}$). Zeigen Sie, dass $\mathfrak{p}R[X]$ ein Primideal von $R[X]$ ist.

(c) Sei $\mathfrak{a} = \{f \in \mathbb{Z}[X] \mid f(0) = 0\}$. Ist $\mathfrak{a}$ ein (i) Hauptideal? (ii) ein Primideal? (iii) ein maximales Ideal von $\mathbb{Z}[X]$?

Aufgabe 2. Bestimmen Sie für die Ringe $R_1 = \mathbb{Z}/315\mathbb{Z}$ und $R_2 = \mathbb{Q}[X]/(X^3 - 6X^2 + 11X - 6)$ die Anzahl ihrer Ideale, Primideale und maximalen Ideale.

Aufgabe 3. Sei R ein kommutativer Ring mit 1 und seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq R$ Ideale von R. Setze

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} :\,= \left\{ \sum_{i=1}^n a_i b_i \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathfrak{a}, b_i \in \mathfrak{b} \right\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ ein Ideal ist mit $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$. Geben Sie ein Beispiel an, bei dem die Inklusion strikt ist, d.h. $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subsetneq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$.

(b) Zeigen Sie: Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ relative prim (d.h. $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = R$), so gilt $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$.

Aufgabe 4. Sei K ein Körper und sei $R = K[X, Y]$ der Polynomring in zwei Unbestimmten über K. Zeigen Sie:

(a) Die Ideal (X) und (Y) sind Primideale, aber nicht maximal.

(b) Das Ideal $(X, Y) :\,= \{fX + gY \mid f, g \in R\}$ ist maximal, aber kein Hauptideal.