Spieß

# 4. Übung zur Vorlesung Algebra 1

Sommersemester 2010 — Abgabe: Do, 20.5.10

**Aufgabe 1.** Sei $R$ ein kommutativer, noetherscher Ring mit 1. Zeigen Sie:

(a) Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

(i) $R$ besitzt genau ein maximales Ideal.

(ii) Die Menge der Nichteinheiten von $R$ bildet ein Ideal.

(In diesem Fall heisst $R$ *lokaler Ring*).

(b) Sei $K$ ein Körper. Ein Unterring $R$ von $K$ heisst *Bewertungsring*, wenn für jedes Element $x \in K^*$ gilt: $x \in R$ oder $x^{-1} \in R$. Zeigen Sie, dass ein Bewertungsring ein lokaler Ring ist.

**Aufgabe 2.** Sei $R$ ein noetherscher Integritätsbereich, so dass jedes maximale Ideal von $R$ ein Hauptideal ist. Zeigen Sie, dass ein irreduzibles Element von $R$ ein Primelement ist.

**Aufgabe 3.** Sei $R$ ein kommutativer Ring, so dass für jedes $x \in R$ eine natürliche Zahl $n > 1$ mit $x^n = x$ existiert. Zeigen Sie, dass jedes Primideal in $R$ maximal ist.

**Aufgabe 4.** Sei $\omega\colon = e^{2\pi i/3} = (-1+\sqrt{3}i)/2$. Es gilt $\omega^3 = 1$, $\omega^2 = \overline{\omega}$. Zeigen Sie:

(a) $\mathbb{Z}[\omega] = \{a + b\omega \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ ist ein Unterring von $\mathbb{C}$.

(b) $\mathbb{Z}[\omega]$ ist ein euklidischer Ring (Hinweis: Betrachten Sie dazu die *Normabbildung* $N(a+b\omega)\colon = (a+b\omega)\overline{(a+b\omega)} = a^2 - ab + b^2$).

(c) Ein Element $z \in \mathbb{Z}[\omega]$ ist genau dann eine Einheit, wenn gilt $N(z) = 1$. Bestimmen Sie die Einheitengruppe $\mathbb{Z}[\omega]^\times$.