Spieß

5. Übung zur Vorlesung Algebra 1

Sommersemester 2010 Abgabe: Do, 27.5.10

Aufgabe 1. Sei K ein Körper und $K[[X]]$ der Ring der formalen Potenzreihen über R (Elemente von $K[[X]]$ sind unendliche Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ mit $a_n \in K$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Zwei formale Potenzreihen $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ und $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n$ werden wie folgt addiert und multipliziert:

$$f + g \colon = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) X^n, \qquad f \cdot g \colon = \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n$$

mit $c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j$).

Zeigen Sie:

(a) Der Quotientenkörper von $K[[X]]$ ist der Körper der formalen Laurentreihen

$$K((X))\colon = \{ f(X) = \sum_{n=-N}^{\infty} a_n X^n \mid N \in \mathbb{N}_0, a_n \in K \text{ für alle } n \geq -N \}$$

(b) $K[[X]]$ ist ein Bewertungsring.

Aufgabe 2. Sei R ein noetherscher Integritätsbereich. Zeigen Sie:

(a) Jedes Element $a \in R - \{0\}$, dass keine Einheit ist, ist ein Produkt von irreduziblen Elementen.

(b) Ist jedes maximale Ideal von R ein Hauptideal, so ist R faktoriell.

(c) Ist jedes maximale Ideal von R ein Hauptideal, so ist R ein Hauptidealring

(*Hinweis*: Zeigen Sie zunächst, dass für das von zwei teilerfremde Elemente a, b erzeugte Ideal gilt $(a, b) = R$. Schliessen Sie, dass für beliebige Elemente $a, b \in R$ gilt $(a, b) = (\mathrm{ggT}(a, b))$).

Aufgabe 3. (a) Sei R ein faktorieller Ring und $a, b, c \in R - \{0\}$. Zeigen Sie:

$$\mathrm{ggT}(ca, cb) = c \ \mathrm{ggT}(a, b).$$

(b) Beweisen Sie, dass der ggT zweier Polynome $f, g \in \mathbb{Q}[X]$ derselbe ist wie ihr ggT in $\mathbb{C}[X]$.

(c) Berechnen Sie den ggT der Polynome $2X^3+9X^2+10X+3$ und X^2-X-2 in $\mathbb{Q}[X]$ und $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]$

(d) Berechnen Sie den ggT von $5+i$ und $1+3i$ in $\mathbb{Z}[i]$.

Aufgabe 4. (a) Sei R ein faktorieller Ring und $K = \mathrm{Quot}(R)$ sein Quotientenkörper. Sei $f(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0 \in R[X]$ ein normiertes Polynom und $a = \frac{p}{q} \in K$ (mit $p, q \in R$ teilerfremd) eine Nullstelle von f. Zeigen Sie, dass p ein Teiler von a_0 und q ein Teiler von a_n ist.

(b) Bestimmen Sie alle rationalen Nullstellen von $3x^4+4x^3-12x^2+4x-15$.