Spieß

6. Übung zur Vorlesung Algebra 1

Sommersemester 2010 Abgabe: Fr, 4.6.10

Aufgabe 1. Sei K/k eine endliche Körpererweiterung. Zeigen Sie:

(a) Ist $[K : k]$ eine Primzahl, so ist K/k einfach ist, d.h. es gibt ein $a \in K$ mit $K = k(a)$.

(b) Ist $[K : k] = 2^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und $f \in k[X]$ ein Polynom vom Grad 3, dass in K eine Nullstelle besitzt, so hat f auch schon in k eine Nullstelle.

Aufgabe 2. (a) Zeigen Sie, dass die folgenden Polynome irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ sind:

(i) $X^{2^n} + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(ii) $6X^4 + 54X^3 + 18X^2 - 9X + 108$.

(iii) $X^4 + a^2$, wobei a eine ungerade ganze Zahl ist.

(b) Sei $f = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ mit $a_0 \neq 0$ und es gelte

$$f = (X - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (X - \alpha_n)$$

über $\mathbb{C}$. Zeigen Sie: Falls $|\alpha_1|, \ldots, |\alpha_{n-1}| < 1$ so ist f irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$.

Aufgabe 3. Sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$ und sei P der Primkörper von K. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $\phi_p : K \to K, x \mapsto \phi_p(x) = x^p$ ist ein Homomorphismus (ϕ_p heisst der *Frobeniusendomorphismus* von K).

(b) $P = \{x \in K \mid \phi_p(x) = x\}$.

Aufgabe 4. Sei K/k eine endliche Körpererweiterung und E und F Zwischenkörper von K/k.

(a) Sei R eine Teilmenge von K mit $k \subset R$ und $a+b, ab \in R$ für alle $a, b \in R$. Zeigen Sie, dass R ein Teilkörper von K ist.

(b) Das *Kompositum von E und F* ist definiert als der kleinste Zwischenkörper, der sowohl E als auch F enthält. Es wird mit EF bezeichnet. Zeigen Sie:

$$EF = \{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \mid \ n \in \mathbb{N}, a_i \in E, b_i \in F\}.$$

(c) $[EF : k] \leq [E : k][F : k]$.

(d) Sind $[E : k]$ und $[F : k]$ teilerfremd, so gilt $[EF : k] = [E : k][F : k]$.

.