Spieß

7. Übung zur Vorlesung Algebra 1

Sommersemester 2010 Abgabe: Do, 17.6.10

Aufgabe 1. (a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $\zeta := e^{2\pi i/5}$ über $\mathbb{Q}$.

(b) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ über $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass gilt $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$.

Aufgabe 2. (a) Bestimmen Sie den Grad eines Zerfällungskörpers von $f = X^3 - 2$ über $\mathbb{Q}$ und über $\mathbb{F}_7$.

(b) Sei k ein Körper und $f \in k[X]$ mit $n := \deg(f) \geq 1$. Sei K ein Zerfällungskörper von f. Zeigen Sie, dass $[K : k]$ ein Teiler von $n!$ ist.

Aufgabe 3. Sei K/k eine endliche Körpererweiterung. Für $a \in K$ bezeichne $r_a : K \to K$ die k-lineare Abbildung $r_a(x) = ax$. Zeigen Sie:

(a) Das Minimalpolynom von a über k ist gleich dem Minimalpolynom von r_a.

(b) Ist $K = k(a)$, so ist das Minimalpolynom von a über k gleich dem charakteristischen Polynom von r_a.

(c) Im Allgemeinen ist das charakteristische Polynom von r_a eine Potenz des Minimalpolynom von a über k.

Aufgabe 4. Sei K/k eine endliche Körpererweiterung.

(a) Zeigen Sie, dass eine endliche Körpererweiterung L/K existiert, so dass L/k normal ist und L minimal mit dieser Eigenschaft ist, d.h. ist M ein Zwischenkörper von L/K, so dass M/k normal ist, so gilt $M = L$ (die Erweiterung L/k heisst *normale Hülle* von K/k).

(b) Die Körpererweiterung L/K aus (a) ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Aufgabe 5. Sei K/k und sei $x \in K$ transzendent über k. Zeigen Sie, dass auch das Element x^n (für $n \in \mathbb{N}$) transzendent über k ist und dass gilt $[k(x) : k(x^n)] = n$.