Spieß

8. Übung zur Vorlesung Algebra 1

Sommersemester 2010 Abgabe: Do, 24.6.10

Aufgabe 1. Sei K/k eine Körpererweiterung und L ein Zwischenkörper von K/k. Zeigen Sie: Sind L/k und K/L separable Erweiterungen, so auch K/k.

Aufgabe 2. Sei K/k eine Körpererweiterung und seien E, F Zwischenkörper von K/k. Zeigen Sie:

(a) Ist E/k separabel, dann ist auch EF/F separabel.

(b) Sind E/k und F/k separabel, dann ist auch EF/k separabel.

Aufgabe 3. Sei k ein Körper der Charakteristik $p > 0$. Betrachten Sie zu $a \in k$ das Polynom $f_a = X^p - X - a \in k[X]$. Zeigen Sie:

(a) f_a ist separabel.

(b) Besitzt f_a in k eine Nullstelle, so zerfällt f_a über k in Linearfaktoren.

(c) Besitzt f_a in k keine Nullstelle, so ist f_a in $k[X]$ irreduzibel.

Aufgabe 4. Sei k ein Körper der Charakteristik $p > 0$ und K/k eine algebraische Körpererweiterung. Ein Element $\alpha \in K$ heisst *rein inseparabel über* k, wenn eine ganze Zahl $n \geq 0$ existiert mit $\alpha^{p^n} \in K$. Die Erweiterung K/k heisst *rein inseparabel*, wenn jedes Element $\alpha \in K$ rein inseparabel über k ist.

(a) Sei $\alpha \in K$ algebraisch über k. Zeigen Sie, dass es eine ganze Zahl $n \geq 0$ gibt, so dass α^{p^n} separabel über k ist.

(b) Sei $\alpha \in K$ rein inseparabel über k und $n \geq 0$ minimal mit $\alpha^{p^n} \in k$. Zeigen Sie, dass $f :\, = X^{p^n} - \alpha^{p^n}$ das Minimalpolynom von α über k ist.

(c) Sei $\alpha \in K$ separabel und rein inseparabel über k. Zeigen Sie, dass dann $\alpha \in k$ gilt.

(d) Sei $K^{\text{sep}} :\, = \{\alpha \in K \mid \ \alpha \text{ ist separabel über } k\}$. Zeigen Sie, dass K^{sep} ein Zwischenkörper von K/k ist, und dass die Erweiterung K/K^{sep} rein inseparabel ist (K^{sep} heisst der *separable Abschluss* von k in K).

(e) Sei k ein endlicher Körper. Zeigen Sie, dass k vollkommen ist (d.h. jede endliche Erweiterung K/k ist separabel).

(Hinweis zu (e): Zeigen Sie zunächst, dass der Frobeniusendomorphismus $\mathbb{F} \to \mathbb{F}, x \mapsto x^p$ für einen endlichen Körper $\mathbb{F}$ der Charakteristik p bijektiv ist. Schliessen Sie, dass ein Element, das über $\mathbb{F}$ rein inseparabel ist, schon in $\mathbb{F}$ liegt).

.