Spieß

3. Übung zur Vorlesung Algebra 1

Sommersemester 2007 Abgabe: Do, 3.5.07

Aufgabe 1. Sei K ein Körper und $M_n(K)$ der Ring der $n \times n$-Matrizen mit Einträgen aus K. Zeigen Sie, dass $M_n(K)$ nur die trivialen Ideale $\{0\}$ und $M_n(K)$ besitzt.

Aufgabe 2. Sei R ein kommutativer Ring und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq R$ Ideale von R. Setze

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} \colon = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathfrak{a}, b_i \in \mathfrak{b} \right\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ ein Ideal ist mit $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$. Geben Sie ein Beispiel an, bei dem die Inklusion strikt ist, d.h. $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subsetneq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$.

(b) Zeigen Sie: Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ relative prim (d.h. $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = R$), so gilt $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$.

Aufgabe 3. Sei R ein kommutativer Ring. Ein Element $a \in R$ heisst nilpotent, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $a^n = 0$. Zeigen Sie:

(a) Besitzt R ein nilpotentes Element $a \neq 0$, so ist die Einheitengruppe R^* eine echte Untergruppe der Einheitengruppe $R[X]^*$.

(b) Die Teilmenge $\sqrt{(0)} \colon = \{a \in R \mid \exists n \in \mathbb{N} : a^n = 0\}$ ist ein Ideal von R (das sogenannte *Nilradikal*) und der Faktorring $R/\sqrt{(0)}$ besitzt keine nilpotenten Elemente $\neq 0$.

Aufgabe 4. (a) Seien R und S kommutative Ringe und sei $\phi : R \to S$ ein Ringepimorphismus. Zeigen Sie, dass durch $\mathfrak{a} \mapsto \phi(\mathfrak{a})$ und $\mathfrak{b} \mapsto \phi^{-1}(\mathfrak{b})$ zueinander inverse Bijektionen zwischen der Menge der Ideale $\mathfrak{a}$ von R mit $\mathfrak{a} \supseteq \mathrm{Kern}(\phi)$ und der Menge aller Ideale $\mathfrak{b}$ von S definiert werden.

(b) Bestimmen Sie für den Ring $\mathbb{Z}/120\mathbb{Z}$ die Anzahl seiner Ideale, Primideale und maximalen Ideale.