Spieß

4. Übung zur Vorlesung Algebra 1

Sommersemester 2007 Abgabe: Do, 10.5.07

Aufgabe 1. Sei R ein kommutativer Ring. Zeigen Sie:

(a) Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

(i) R besitzt genau ein maximales Ideal.

(ii) Die Menge der Nichteinheiten von R bildet ein Ideal.

(In diesem Fall heisst R *lokaler Ring*).

(b) Sei K ein Körper. Ein Unterring R von K heisst *Bewertungsring*, wenn für jedes Element $x \in K^*$ gilt: $x \in R$ oder $x^{-1} \in R$. Zeigen Sie, dass ein Bewertungsring ein lokaler Ring ist.

Aufgabe 2. Sei R ein Integritätsbereich. Zeigen Sie, dass der Ring $R' = R[X,Y]/(X^2 - Y^3)$ ebenfalls ein Integritätsbereich ist.

(Hinweis: Beweisen Sie, dass R' isomorph zum Unterring $\{\sum_{i=0}^n a_i X^i \in R[X] \mid a_1 = 0\}$ von $R[X]$ ist).

Aufgabe 3. Sei R ein kommutativer Ring, so dass für jedes $x \in R$ eine natürliche Zahl $n > 1$ mit $x^n = x$ existiert. Zeigen Sie, dass jedes Primideal in R maximal ist.

Aufgabe 4. Sei $\omega :\, = (-1 + \sqrt{3}\, i)/2 = \exp(\frac{2\pi i}{3})$. Es gilt $\omega^3 = 1, \omega^2 = \overline{\omega}$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{Z}[\omega] :\, = \{a + b\omega \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

der kleinste Unterring von $\mathbb{C}$ ist, der ω enthält.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[\omega]$ ein euklidischer Ring ist. (Hinweis: Betrachten Sie dazu die *Normabbildung* $N(a + b\omega) :\, = (a + b\omega)(\overline{a + b\omega}) = a^2 - ab + b^2$).

(c) Ein Element $z \in \mathbb{Z}[\omega]$ ist genau dann eine Einheit, wenn gilt $N(z) = 1$. Bestimmen Sie alle Einheiten von $\mathbb{Z}[\omega]$. (Hinweis: Wegen $\omega^2 = \overline{\omega}$ ist der Ring $\mathbb{Z}[\omega]$ abgeschlossen unter der komplexen Konjugation $a + b\omega \mapsto \overline{a + b\omega}$.)