Spieß

6. Übung zur Vorlesung Algebra 1

Sommersemester 2007 Abgabe: Do, 31.5.07

Aufgabe 1. Sei K/k eine endliche Körpererweiterung.

(a) Sei R eine Teilmenge von K mit $k \subset R$ und $a+b, ab \in R$ für alle $a, b \in R$. Zeigen Sie, dass R ein Teilkörper von K ist.

(b) Seien E, F Zwischenkörper von K/k. Das *Kompositum von E und F* ist definiert als der kleinste Zwischenkörper, der sowohl E als auch F enthält. Es wird mit EF bezeichnet. Zeigen Sie:

$$EF = \{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \mid \ n \in \mathbb{N}, a_i \in E, b_i \in F\}.$$

(c) Seien E, F wie in Teil (b). Zeigen Sie, dass für die Körpergrade gilt:

$$[EF : k] \leq [E : k]\,[F : k]$$

Aufgabe 2. Sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$ und sei P der Primkörper von K. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $\phi_p : K \to K, x \mapsto \phi_p(x) = x^p$ ist ein Homomorphismus (ϕ_p heisst der *Frobeniusendomorphismus* von K).

(b) $P = \{x \in K \mid \ \phi_p(x) = x\}$.

Aufgabe 3. (a) Zeigen Sie, dass die folgenden Polynome irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ sind:

(i) $X^4 + X + 1$;

(ii) $\frac{7}{18}X^5 + \frac{3}{5}X^4 - \frac{17}{15}X^2 + 2X - \frac{1}{3}$;

(iii) $X^4 + a^2$, wobei a eine ungerade ganze Zahl ist.

(b) Zeigen Sie, dass das folgende Polynom irreduzibel in $\mathbb{Q}[X, Y]$ ist:

$X^2Y + Y^2X + Y^2 - X - Y + 1$

Aufgabe 4. (a) Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass es in $K[X]$ unendlich viele normierte irreduzible Polynome gibt.

(b) Sei K ein Körper, so dass jedes nicht-konstante Polynom eine Nullstelle in K besitzt. Zeigen Sie, dass K unendlich viele Elemente besitzt.