

7. Übung zur Vorlesung Algebra 1

Sommersemester 2007

Abgabe: Di, 12.6.07

Aufgabe 1. (a) Bestimmen Sie den Grad eines Zerfällungskörper des Polynoms $f = X^3 - 2$ über \mathbb{Q} und über \mathbb{F}_7 .

(b) Sei k ein Körper und $f \in k[X]$ ein nicht-konstantes Polynom vom Grad n . Sei K ein Zerfällungskörper von f . Zeigen Sie, dass $[K : k]$ ein Teiler von $n!$ ist.

Aufgabe 2. (a) Bestimmen Sie die irreduziblen Polynome vom Grad 2 über dem Körper \mathbb{F}_2 .

(b) Konstruieren Sie einen Körper mit vier Elementen.

(c) Zeigen Sie, dass je zwei Körper mit vier Elementen isomorph sind.

Aufgabe 3. Sei K/k eine endliche Körpererweiterung. Für $a \in K$ bezeichne $\rho_a : K \rightarrow K$ die k -lineare Abbildung $\rho_a(x) = ax$. Zeigen Sie:

(a) Das Minimalpolynom von a über k ist gleich dem Minimalpolynom von ρ_a .

(b) Ist $K = k(a)$, so ist das Minimalpolynom von a über k gleich dem charakteristischen Polynom von ρ_a .

(c) Für jedes $a \in K$ ist das charakteristische Polynom von ρ_a eine Potenz des Minimalpolynoms von a über k .

Aufgabe 4. Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ über den folgenden Körpern:

(a) $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$,

(b) \mathbb{Q} ,

(a) $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$.