Spieß

# 8. Übung zur Vorlesung Algebra 1

Sommersemester 2007 Abgabe: Do, 21.6.07

**Aufgabe 1.** Sei $K/k$ eine Körpererweiterung und $L$ ein Zwischenkörper von $K/k$. Zeigen Sie: Sind $L/k$ und $K/L$ separable Erweiterungen, so auch $K/k$.

**Aufgabe 2.** (a) Seien $K/k$ und $K'/K$ endliche Körpererweiterungen, so dass $K'/k$ normal ist. Zeigen Sie: Es existiert ein kleinster Zwischenkörper $L$ von $K'/k$, mit $L \supseteq K$ und $L/k$ normal ($L/k$ heisst die normale Hülle von $K/k$ in $K'$).

(b) Sei $K/k$ endlich. Zeigen Sie, dass für die normale Hülle $L/K$ von $K/k$ in $K'$ gilt: Ist $M/K$ eine Körpererweiterung mit $M/k$ normal, so gibt es einen Körperhomomorphismus $\phi : L \to M$, mit $\phi(x) = x$ für alle $x \in K$.

(c) Sei $\overline{\mathbb{Q}} = \{\alpha \in \mathbb{C} \mid \ \alpha \text{ ist algebraisch über } \mathbb{Q}\}$. Zeigen Sie, dass $\overline{\mathbb{Q}}$ ein Körper ist und die Körpererweiterung $\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$ normal ist. Zeigen Sie, das $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3}, i)$ die normale Hülle von $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})/\mathbb{Q}$ in $\overline{\mathbb{Q}}$ ist.

**Aufgabe 3.** Sei $K/k$ eine endliche Körpererweiterung vom Grad $n = [K : k]$.

(a) Für $\alpha \in K$ gebe es $n$ Körperautomorphismen $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \mathrm{Aut}_k(K)$ mit $\sigma_i(\alpha) \neq \sigma_j(\alpha)$ für $i \neq j$. Zeigen Sie, dass dann $K = k(\alpha)$ gilt.

(b) Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3}, i)$. Bestimmen Sie alle Elemente von $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ und den Grad $[K : \mathbb{Q}]$.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3} + i) = K$.

**Aufgabe 4.** Sei $k$ ein Körper der Charakteristik $p > 0$ und $K/k$ eine algebraische Körpererweiterung. $\alpha \in K$ heisst *rein inseparabel über* $k$, wenn eine ganze Zahl $n \geq 0$ existiert mit $\alpha^{p^n} \in K$. Die Erweiterung $K/k$ heisst *rein inseparabel*, wenn jedes Element $\alpha \in K$ rein inseparabel über $k$ ist.

(a) Sei $\alpha \in K$ algebraisch über $k$. Zeigen Sie, dass es eine ganze Zahl $n \geq 0$ gibt, so dass $\alpha^{p^n}$ separabel über $k$ ist.

(b) Sei $\alpha \in K$ rein inseparabel über $k$ und $n \geq 0$ minimal mit $\alpha^{p^n} \in k$. Zeigen Sie, dass $f \colon = X^{p^n} - \alpha^{p^n}$ das Minimalpolynom von $\alpha$ über $k$ ist.

(c) Sei $\alpha \in K$ separabel und rein inseparabel über $k$. Zeigen Sie, dass dann $\alpha \in k$ gilt.

(d) Sei $K_{\text{sep}} := \{\alpha \in K \mid \alpha \text{ ist separabel über } k\}$. Zeigen Sie, dass $K_{\text{sep}}$ ein Zwischenkörper von $K/k$ ist, und dass die Erweiterung $K/K_{\text{sep}}$ rein inseparabel ist ($K_{\text{sep}}$ heisst der *separable Abschluss* von $k$ in $K$).

(e) Sei $k$ ein endlicher Körper. Zeigen Sie, dass $k$ vollkommen ist (d.h. jede endliche Erweiterung $K/k$ ist separabel).

(Hinweis zu (e): Zeigen Sie zunächst, dass der Frobeniusendomorphismus $\mathbb{F} \to \mathbb{F}, x \mapsto x^p$ für einen endlichen Körper $\mathbb{F}$ der Charakteristik $p$ bijektiv ist. Schliessen Sie, dass ein Element, das über $\mathbb{F} := K_{\text{sep}}$ rein inseparabel ist, schon in $\mathbb{F}$ liegt).