Spieß

9. Übung zur Vorlesung Algebra 1

Sommersemester 2007 Abgabe: Do, 28.6.07

Aufgabe 1. Sei K Zerfällungskörper des Polynoms $f = (X^2 - 2)(X^2 - 3) \in \mathbb{Q}[X]$. Bestimmen Sie die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$, ihre Untergruppen und die zugehörigen Fixkörper in K.

Aufgabe 2. Sei K/k eine endliche galoissche Körpererweiterung, deren Galoisgruppe isomorph zur symmetrischen Gruppe S_3 ist. Zeigen Sie, dass K Zerfällungskörper eines irreduziblen Polynoms $f \in k[X]$ vom Grad 3 ist.

Aufgabe 3. Sei k ein Körper der Charakteristik $p > 0$. Für $a \in k$ sei $f_a = X^p - X - a$. Zeigen Sie:

(a) f_a ist separabel.

(b) Sei K/k Zerfällungskörper von f_a und $\alpha \in K$ Nullstelle von f_a. Dann ist $K = k[\alpha]$. (Hinweis: Wie lassen sich die anderen Nullstellen von f_a mit Hilfe von α ausdrücken?)

(c) Besitzt f_a keine Nullstelle in k, so ist f_a irreduzibel in $k[X]$.

(d) Sei f_a irreduzibel. Zeigen Sie, dass die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(K/k)$ eine zyklische Gruppe der Ordnung p ist.

Aufgabe 4. Sei k ein Körper und $f \in k[X]$ ein irreduzibles, separables Polynom vom Grad n, dessen Galoisgruppe abelsch ist. Zeigen Sie, dass jede Wurzel von f ein primitives Element des Zerfällungskörpers von f ist.