Spieß

11. Übung zur Vorlesung Algebra 2

Wintersemester 2007/08 Di, 22.1.08

Aufgabe 1. Sei K ein Körper, sei $f \in K[T_1, \ldots, T_n]$ nicht konstant und sei $R\colon = K[T_1, \ldots, T_n]/(f)$. Zeigen Sie

$\operatorname{Spec} R$ ist reduziert $\Leftrightarrow$ f hat keinen quadratischen Faktor.

$\operatorname{Spec} R$ ist irreduzibel $\Leftrightarrow$ f hat nur einen irreduziblen Faktor.

$\operatorname{Spec} R$ ist nullteilerfrei $\Leftrightarrow$ f ist irreduzibel.

Aufgabe 2. Sei X ein Schema und $f_1, \ldots, f_n \in R\colon = \mathcal{O}_X(X)$, so dass gilt:

(i) $X_{f_1}, \ldots, X_{f_n}$ sind affin.

(ii) $Rf_1 + \ldots + Rf_n = R$.

Zeigen Sie, dass X affin ist.

Aufgabe 3. Ein topologischer Raum T heisst *noethersch*, wenn jede absteigende Kette von $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq Y_3 \supseteq \ldots$ von abgeschlossenen Teilmengen von T stationär wird (d.h. es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $Y_n = Y_{n+1} = Y_{n+2} = \ldots$).

Sei X ein noethersches Schema. Zeigen Sie, dass der topologische Raum $\operatorname{sp}(X)$ noethersch ist.

Aufgabe 4. Sei X ein lokal-noethersches Schema. Zeigen Sie, dass die Zusammenhangskomponenten von $\operatorname{sp}(X)$ offen und abgeschlossen sind.