Spieß

12. Übung zur Vorlesung Algebra 2

Wintersemester 2007/08 Di, 29.1.08

Aufgabe 1. Sei R ein Ring und $X := \mathbb{P}^n_R = \operatorname{Proj} R[T_0, \dots, T_n]$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{O}_X(X) = R$ (Hinweis: Benutzen Sie die offene Überdeckung $\{U_i\}_{i=0,1,\dots,n}$ von X mit $U_i = D_+(T_i)$ und die Garbeneigenschaft von $\mathcal{O}_X$). Folgern Sie, dass $\mathbb{P}^n_R$ nur für $n = 0$ affin ist.

Aufgabe 2. Sei K ein Körper und $V := \operatorname{Spec} K[X, Y, Z]/(X^2 - YZ, XZ - X)$. Zeigen Sie, dass V drei irreduzible Komponenten besitzt.

Aufgabe 3. Sei K ein Körper und R der Polynomring in 4 Unbestimmten über K. Die Unbestimmten bezeichnen wir mit A, B, C, D. Sei

$$\mathfrak{a} := (AA + BC, AB + BD, CA + CD, CB + DD).$$

Zeigen Sie, dass

$$\mathfrak{a} \subsetneq \sqrt{\mathfrak{a}} = (AD - BC, A + D).$$

Aufgabe 4. Sei R ein faktorieller Ring.

(a) Sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R - \{(0)\}$. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{p}$ genau dann ein Hauptideal ist, wenn gilt $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = 1$.

(b) Sei $f \in R - \{0\}$ keine Einheit und $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ minimal über (f). Zeigen Sie, dass gilt $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = 1$ (Hinweis: R ist nicht notwendig noethersch).