Spieß

# 2. Übung zur Vorlesung Algebra 2

Wintersemester 2007/08 Abgabe: Di, 6.11.07

**Aufgabe 1.** Sei $K$ ein Körper der Charakteristik $p$ und $L/K$ eine zyklische Erweiterung vom Grad $p$ (d.h. $L/K$ ist galoissch mit zyklischer Galoisgruppe der Ordnung $p$). Sei $\sigma : L \to L$ ein Erzeuger von $\mathrm{Gal}(L/K)$. Zeigen Sie:

(a) Die $K$-lineare Abbildung $s : L \to L, x \mapsto \sigma(x) - x$ ist nilpotent.

(b) Es gibt ein $\beta \in L$ mit $s(\beta) \neq 0$ und $s^2(\beta) = 0$.

(c) $L$ ist Zerfällungskörper eines Polynoms $f = X^p - X - a$ für ein $a \in K$.

(Hinweis: Sei $\alpha\colon = \frac{\beta}{s(\beta)} \in L$. Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $\alpha$).

**Aufgabe 2.** Sei $n \geq 2$ und $G \subseteq \mathfrak{S}_n$ eine Untergruppe mit folgenden Eigenschaften:

(i) Für je zwei Elemente $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ gibt es ein $\sigma \in G$ mit $\sigma(i) = j$ (d.h. $G$ operiert *transitiv* auf $\{1, 2, \ldots, n\}$).

(ii) $G$ enthält einen $(n-1)$–Zyklus und eine Transposition.

Zeigen Sie: $G = \mathfrak{S}_n$.

**Aufgabe 3.** Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 3$ und $f = X^5 - kX + 1 \in \mathbb{Q}[X]$. Sei $K/\mathbb{Q}$ ein Zerfällungskörper von $f$. Zeigen Sie:

$$\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \cong \mathfrak{S}_5.$$

**Aufgabe 4.** Eine Permutation $\sigma\mathfrak{S}_n$ heisst *linear*, wenn es ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ gibt, mit $\mathrm{ggT}(a, n) = 1$ und $\sigma(x) = ax+b \mod n$ für alle $x \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Eine Untergruppe $H$ von $\mathfrak{S}_n$ heisst *linear*, wenn jedes ihrer Elemente linear ist.

Sei $p \geq 3$ eine Primzahl und $f \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel vom Grad $p$. Sei $K/\mathbb{Q}$ ein Zerfällungskörper von $f$ und seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ die verschiedenen Nullstellen von $f$ in $K$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ genau dann linear ist, wenn gilt:

$$K = \mathbb{Q}(\alpha_i, \alpha_j) \qquad \forall i, j \in \{1, 2, \ldots, p\}, i \neq j$$