Spieß

3. Übung zur Vorlesung Algebra 2

Wintersemester 2007/08 Di, 6.11.07

Aufgabe 1. Sei K' ein Zwischenkörper der Galoiserweiterung L/K. Zeigen Sie:

(a) Die Krulltopologie auf $\mathrm{Gal}(L/K')$ ist gleich der durch die Inklusion $\mathrm{Gal}(L/K') \subset \mathrm{Gal}(L/K)$ induzierten Topologie.

(b) Ist K'/K normal, so ist die Krulltopologie auf $\mathrm{Gal}(K'/K)$ gleich der Quotiententopologie bezüglich der Surjektion $\pi : \mathrm{Gal}(L/K) \to \mathrm{Gal}(K'/K)$ (Erinnerung: Eine Teilmenge $U \subset \mathrm{Gal}(K'/K)$ ist offen bzgl. der Quotiententopologie genau dann wenn $\pi^{-1}(U)$ offen in $\mathrm{Gal}(L/K)$ ist).

Aufgabe 2. Sei K der Unterkörper von $\mathbb{R}$ der durch Adjunktion aller Wurzeln $\sqrt{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ aus $\mathbb{Q}$ entsteht, d.h. $K = \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots]$. Zeigen Sie:

(a) $K/\mathbb{Q}$ is galoissch und es gilt

$$\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \cong \prod_p \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

wobei p die Menge aller Primzahlen durchläuft.

(b) Sei

$$H := \{(\sigma_p) \in \prod_p \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \mid \sigma_p = 0 \text{ für alle bis auf endlich viele } p\}$$

Zeigen Sie, dass H dicht in $\prod_p \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist.

(c) Sei V ein unendlichdimensionaler Vektorraum. Zeigen Sie mit Hilfe des Zornschen Lemmas, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Untervektorraum V_n gibt mit $\dim(V/V_n) = n$. Benutzen Sie dies um zu zeigen, dass $\prod_p \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ eine Untergruppe vom Index 2^n besitzt die H enthält.

(d) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \cong \prod_p \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ eine nicht-offene Untergruppe von endlichem Index besitzt.

Aufgabe 3. (a) Sei $f : G_1 \to G_2$ ein stetiger Homomorphismus von topologische Gruppen. Zeigen Sie: Ist G_1 pro-endlich und G_2 hausdorffsch, so ist das Bild $f(G_1)$ wieder pro-endlich.

(b) Sei G eine pro-endliche Gruppe und $\chi : G \to \mathbb{C}^*$ ein *Charakter*, d.h. ein stetiger Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie, dass das Bild $\chi(G)$ endlich ist.