Spieß

4. Übung zur Vorlesung Algebra 2

Wintersemester 2007/08 Di, 13.11.07

Aufgabe 1. Sei G eine pro-endliche Gruppe und $H \subseteq G$ ein abgeschlossener Normalteiler.

(a) Zeigen Sie, dass H der Durchschnitt aller offenen Normalteiler $N \subseteq G$ mit $N \supseteq H$ ist.

(b) Sei $\pi : G \to G/H$ die natürliche Projektion. Zeigen Sie, dass G/H mit der Quotiententopologie bzgl. π eine pro-endliche Gruppe ist.

(Erinnerung: Eine Teilmenge $U \supseteq G/H$ ist genau dann offen bzgl. der Quotiententopologie, wenn $\pi^{-1}(U)$ offen ist).

Aufgabe 2. Gibt es eine Galoiserweiterung L/K mit $\mathrm{Gal}(L/K) \cong \mathbb{Z}$?

Aufgabe 3. Sei L ein Körper, sei G eine Untergruppe von $\mathrm{Aut}(L)$ und sei $K\colon = \{x \in L \mid \sigma(x) = x \ \forall \sigma \in G\}$.

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Die Bahnen der Operation von G auf L sind endlich.

(ii) Die Körpererweiterung L/K ist algebraisch.

(iii) Die Körpererweiterung L/K ist galoissch.

(b) Sind die äquivalenten Bedingungen aus (a) erfüllt, so ist G eine dichte Untergruppe von $\mathrm{Gal}(L/K)$

(Erinnerung: Eine Teilmenge Y eines topologischen Raums X heisst dicht, wenn die einzige abgeschlossene Teilmenge von X, die Y enthält, die Menge X selber ist).

Aufgabe 4. Sei L/K eine Galoiserweiterung mit Galoisgruppe $G\colon = \mathrm{Gal}(L/K)$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $[L : K] = \dim_K(L)$ ist abzählbar (d.h. L besitzt eine abzählbare K-Basis).

(ii) $\mathrm{Id}_L \in G$ besitzt eine abzählbare Umgebungsbasis.

(iii) Die Krulltopologie auf G besitzt eine abzählbare Basis.