Spieß

5. Übung zur Vorlesung Algebra 2

Wintersemester 2007/08 Di, 20.11.07

Aufgabe 1. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal im Polynomring in n Unbestimmten $R = K[X_1, \ldots, X_n]$. Zeigen Sie dass es eine natürliche Bijektion zwischen der Menge

$$V(\mathfrak{a}) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in K^n \mid f(x_1, \ldots, x_n) = 0 \ \forall f \in \mathfrak{a}\}$$

und der Menge der maximalen Ideale von $R/\mathfrak{a}$ gibt.

Aufgabe 2. Sei R ein Ring und

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_2} & & \downarrow{\scriptstyle f_3} & & \\ 0 & \longrightarrow & N_1 & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & N_3 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm von R-Moduln mit exakten Zeilen. Zeigen Sie, dass es einen Homomorphismus $\Delta : \mathrm{Ker}(f_3) \to \mathrm{Koker}(f_1)$ gibt, der auf Repräsentanten in M durch Anwendung von f definiert wird. Zeige, dass dieses Δ zusammen mit den natürlichen Homomorphismen zwischen den Kernen und Kokernen die folgende exakte Sequenz liefert:

$$0 \to \mathrm{Ker}(f_1) \to \mathrm{Ker}(f_2) \to \mathrm{Ker}(f_3) \xrightarrow{\Delta} \mathrm{Koker}(f_1) \to \mathrm{Koker}(f_2) \to \mathrm{Koker}(f_3) \to 0$$

(Dabei ist der Kokern eines Homomorphismus von R-Moduln $f : M \to N$ definiert als der Faktormodul $N/\mathrm{Bild}(f)$).

Aufgabe 3. (a) Sei $\phi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus und $\mathfrak{p}$ ein Primideal in B. Zeigen Sie, dass das Urbild $\phi^{-1}(\mathfrak{p})$ ein Primideal in A ist.

(b) Geben Sie ein Beispiel für ein Ringhomomorphismus $\phi : A \to B$ und ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ in B an, dessen Urbild $\phi^{-1}(\mathfrak{m})$ kein maximales Ideal in A ist.

(c) Sei K ein Körper und $\phi : A \to B$ ein Homomorphismus von endlich erzeugten K-Algebren. Zeigen Sie, dass das Urbild $\phi^{-1}(\mathfrak{m})$ eines maximales Ideal $\mathfrak{m} \subseteq B$ ein maximales Ideal ist.

Aufgabe 4. Sei R ein Ring und M ein R-Modul. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(i) Jede aufsteigende Folge $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots \subseteq M_n \subseteq M_{n+1} \subseteq \ldots$ von Untermoduln von M wird stationär.

(ii) Jeder Untermodul von M ist endlich erzeugt.

(iii) Jede nicht-leere Menge von Untermoduln X von M besitzt ein maximales Element, d.h. es gibt einen Untermodul $M_0 \in X$, so dass für alle M' in X gilt:

$$M_0 \subset M' \quad \Rightarrow \quad M_0 = M'.$$