Spieß

6. Übung zur Vorlesung Algebra 2

Wintersemester 2007/08 Di, 27.11.07

Aufgabe 1. Sei R ein Ring und $f \in R$. Zeigen Sie:

(a) $D(f) = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad f \in \sqrt{(0)}$.

(b) $D(f) = \operatorname{Spec} R \quad \Leftrightarrow \quad f \in R^*$.

Aufgabe 2. Sei X ein topologischer Raum. X heisst T_0-Raum wenn für je zwei Punkte $x, y \in X$ mit $x \neq y$ eine offene Teilmenge $U \subseteq X$ existiert mit $x \in U, y \notin U$ oder $y \in U, x \notin U$ (d.h. wenn sich die Mengen aller Umgebungen von x und y unterscheiden). Ein Punkt $\xi \in X$ heisst *generischer Punkt von* X falls gilt $\overline{\{\xi\}} = X$.

(a) Ein T_0-Raum besitzt höchstens einen generischen Punkt.

(b) Ein Hausdorffraum mit mindestens zwei verschiedenen Elementen besitzt keinen generischen Punkt.

(c) Ist R ein Ring, so ist $\operatorname{Spec} R$ ein T_0-Raum.

(d) Sei K ein Körper K. Bestimmen Sie den generischen Punkt von $\mathbb{A}^1_K = \operatorname{Spec} K[X]$ und von $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$.

(Erinnerung: Sei $Y \subseteq X$ eine Teilmenge des topologischen Raums X. Die *abgeschlossene Hülle* $\overline{Y}$ von Y ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen Teilmengen A von X, die Y umfassen.)

Aufgabe 3. Sei R ein Ring und $f \in R$. Zeigen Sie, dass es einen kanonischen Isomorphismus von R-Algebren $R[X]/(aX-1) \cong R_f$ gibt.