Spieß

# 7. Übung zur Vorlesung Algebra 2

Wintersemester 2007/08 Di, 4.12.07

**Aufgabe 1.** Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf dem topologischen Raum $X$ und seien $s, t \in \mathcal{F}(X)$. Zeigen Sie, dass die Menge $\{x \in X \mid s_x = t_x\}$ offen in $X$ ist.

**Aufgabe 2.** Sei $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Homomorphismus von Garben von abelschen Gruppen auf dem topologischen Raum $X$. Für eine offene Teilmenge $U \subseteq X$ sei $\mathrm{Kern}(\alpha)(U) \colon = \mathrm{Kern}(\alpha(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$. Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{Kern}(\alpha)$ ist eine Untergarbe von $\mathcal{F}$.

(b) Für jedes $x \in X$ ist $\mathrm{Kern}(\alpha)_x = \mathrm{Kern}(\alpha_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x)$.

(c) $\alpha$ ist genau dann injektiv, wenn $\mathrm{Kern}(\alpha) = 0$ ist.

**Aufgabe 3.** Sei $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Homomorphismus von Garben von abelschen Gruppen auf dem topologischen Raum $X$. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(i) $\alpha$ ist surjektiv.

(ii) Zu jeder offenen Menge $U \subseteq X$ und jedem $t \in \mathcal{G}(U)$ existiert eine offene Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von $U$ und Elemente $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$, so dass $\alpha(U_i)(s_i) = t_i|_{U_i}$ für alle $i \in I$.

**Aufgabe 4.** Sei $X$ ein topologischer Raum $A$ eine abelsche Gruppe und $x \in X$. Sei $\mathcal{F}$ die folgende Garbe:

$$\mathcal{F}(U) \colon = \begin{cases} A & \text{falls } x \in U, \\ 0 & \text{falls } x \notin U \end{cases}$$

(eine Garbe dieser Form heisst *Wolkenkratzergarbe*). Zeigen Sie, dass für die Halme von $\mathcal{F}$ gilt:

$$\mathcal{F}_y = \begin{cases} A & \text{falls } y \in \overline{\{x\}}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

**Aufgabe 5.** Eine Garbe $\mathcal{F}$ auf einem topologischen Raum $X$ heisst welk, wenn die Restriktionsabbildungen $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ für alle offenen Teilmengen

$V \subseteq U$ von $X$ surjektiv sind. Sei

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_1 \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{\beta} \mathcal{F}_3 \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Garben von abelschen Gruppen. Zeigen Sie:

(a) Für jede offenen Teilmenge $U$ von $X$ ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_1(U) \xrightarrow{\alpha(U)} \mathcal{F}_2(U) \xrightarrow{\beta(U)} \mathcal{F}_3(U)$$

exakt.

(b) Ist $\mathcal{F}_1$ welk, so ist $\beta(U) : \mathcal{F}_2(U) \to \mathcal{F}_3(U)$ surjektiv für jedes offene $U \subseteq X$, d.h. die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_1(U) \xrightarrow{\alpha(U)} \mathcal{F}_2(U) \xrightarrow{\beta(U)} \mathcal{F}_3(U) \longrightarrow 0$$

ist exakt.