Spieß

8. Übung zur Vorlesung Algebra 2

Wintersemester 2007/08 Di, 11.12.07

Aufgabe 1. Seien $f : X \to Y, g : Y \to Z$ stetige Abbildung von topologischen Räumen.

(a) Sei $\mathcal{G}' \to \mathcal{G} \to \mathcal{G}''$ ein exakte Sequenz von Garben auf Y. Zeigen Sie, dass die Sequenz

$$f^{-1}(\mathcal{G}') \longrightarrow f^{-1}(\mathcal{G}) \longrightarrow f^{-1}(\mathcal{G}'')$$

wieder exakt ist.

(b) Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X und $\mathcal{G}$ eine Garbe auf Z. Zeigen Sie:

$$g_*(f_*(\mathcal{F})) = (g \circ f)_*(\mathcal{F}), \qquad f^{-1}(g^{-1}(\mathcal{G})) = (g \circ f)^{-1}(\mathcal{G})).$$

Aufgabe 2. Sei X ein topologischer Raum und $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}''$ eine exakte Sequenz von Garben auf X. Zeigen Sie, dass für jede offene Teilmenge U von X die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}'(U) \longrightarrow \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}''(U)$$

exakt ist.

Aufgabe 3. Sei X ein topologischer Raum und A eine abelsche Gruppe. Wir definieren die konstante Garbe A_X auf X wie folgt. Für eine offene Teilmenge U von X sei $A_X(U)$ die Gruppe der lokalkonstanten Abbildungen $X \to A$ (eine Abbildung $f : X \to A$ heisst *lokalkonstant*, wenn jedes $x \in X$ eine Umgebung U besitzt, so dass $f|_U$ konstant ist). Zeigen Sie, dass A_X die zu der konstanten Prägarbe $U \mapsto A$ assoziierte Garbe ist.

Aufgabe 4. Sei $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Mit $\mathcal{C}_{S^1}$ bezeichnen wir die Garbe der stetigen reelwertigen Funktionen auf X und mit $\mathbb{R}_{S^1}$ die Untergarbe der reelwertigen lokalkonstanten Funktionen. Sei $\mathcal{F}$ der Quotient von $\mathcal{C}_{S^1}$ nach $\mathbb{R}_{S^1}$ im Sinne von Prägarben (d.h. $\mathcal{F}$ ist die Prägarbe $U \mapsto \mathcal{C}_{S^1}(U)/\mathbb{R}_{S^1}(U)$). Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ keine Garbe ist.

Aufgabe 5. Sei $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Homomorphismus von Garben. Zeigen Sie, dass gilt $\mathrm{Koker}(\alpha) \cong \mathcal{G}/\mathrm{Im}(\alpha)$.