10. Übung zur Vorlesung Algebra 3

Sommersemester 2011 Abgabe: Do, 7.7.2011

Aufgabe 1. (a) Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Schemata. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind (in diesem Fall heisst f *endlich*):

(i) Ist $V \subseteq Y$ affin-offen, so ist $f^{-1}(V)$ affin-offen in X und $\mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$ ist eine endliche $\mathcal{O}_Y(V)$-Algebra.

(ii) Es gibt eine affin-offene Überdeckung $\{V_i\}_{i\in I}$ von Y gibt, so dass $f^{-1}(V_i)$ affin-offen in X ist und $\mathcal{O}_X(f^{-1}(V_i))$ eine endliche $\mathcal{O}_Y(V_i)$-Algebra ist.

(b) Abgeschlossene Immersionen sind endlich.

(c) Die Komposition zweier endlicher Morphismen ist wieder endlich.

(d) Die Eigenschaft "f ist endlich" ist stabil unter Basiswechsel.

Aufgabe 2. Sei $A \subseteq B$ eine endliche Ringerweiterung, d.h. A ist ein Unterring von B und B ist als A-Modul endlich erzeugt.

(a) Zeigen Sie, dass der durch die Inklusion induzierte Morphismus $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ surjektiv ist (Hinweis: Lokalisieren Sie und benutzen Sie das Nakayama Lemma).

(b) Sei $\mathfrak{p}_0 \subseteq \mathfrak{p}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{p}_n$ eine aufsteigende Folge von Primidealen von R. Zeigen Sie, dass es eine Folge von Primidealen $\mathfrak{P}_0 \subseteq \mathfrak{P}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{P}_n$ von B gibt mit $\mathfrak{P}_i \cap A = \mathfrak{p}_i$ für $i = 1, \ldots, n$.

(c) Ist B ein Integritätsbereich, so gilt für $\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec} B$:

$$\mathfrak{P} \cap R = (0) \implies \mathfrak{P} = (0).$$

(d) Seien $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2 \in \operatorname{Spec} B$ mit $\mathfrak{P}_1 \subseteq \mathfrak{P}_2$. Zeigen Sie:

$$\mathfrak{P}_1 \cap A = \mathfrak{P}_2 \cap A \implies \mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}_2.$$

(e) Die Krull Dimension $\dim R \in \mathbb{N}_0 \cap \{\infty\}$ eines Rings R ist definiert durch

$$\dim R \;=\; \sup\{n \mid \exists \mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n \in \operatorname{Spec} R :\; \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_n\}.$$

Zeigen Sie: $\dim A = \dim B$.

Aufgabe 3. Sei $f : X \to S$ ein Morphismus von Schemata. Zeigen Sie: Hat f endliche Fasern (d.h. die Menge $f^{-1}(s)$ ist für alle $s \in S$ endlich) und ist f von endlichem Typ, so ist f quasi-endlich (d.h. die schematheoretische Faser $X_s = X \times_S \operatorname{Spec} k(s)$ ist endlich über $\operatorname{Spec} k(s)$ für alle $s \in S$).