Spieß

2. Übung zur Vorlesung Algebra 3

Sommersemester 2011 Abgabe: Do, 28.4.2011

Aufgabe 1. Sei R ein Ring und $f \in R$. Zeigen Sie:

(a) $D(f) = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad f \in \mathrm{rad}(R)$.

(b) $D(f) = \mathrm{Spec}\ R \quad \Leftrightarrow \quad f \in R^*$.

Aufgabe 2. Ein topologischer Raum X heisst T_0-Raum, wenn für je zwei Punkte $x, y \in X$ mit $x \neq y$ eine offene Teilmenge $U \subseteq X$ existiert mit $x \in U, y \notin U$ oder $y \in U, x \notin U$ (d.h. wenn sich die Mengen aller Umgebungen von x und y unterscheiden). Ein Punkt $\xi \in X$ heisst *generischer Punkt von* X falls gilt $\overline{\{\xi\}} = X$.

(a) Ein T_0-Raum besitzt höchstens einen generischen Punkt.

(b) Ein Hausdorffraum mit mindestens zwei verschiedenen Elementen besitzt keinen generischen Punkt.

(c) Ist R ein Ring, so ist Spec R ein T_0-Raum.

Aufgabe 3. Sei R ein Ring und seien m, n positive ganze Zahlen. Beweisen Sie dass die R-Algebren $R[T_1, \ldots, T_{m+n}]$ und $R[T_1, \ldots, T_m] \otimes_R R[T_1, \ldots, T_n]$ isomorph sind.

Aufgabe 4. Sei R ein Ring. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind.

(i) Spec R ist unzusammenhängend;

(ii) R enthält ein Idempotent e (d.h. $e^2 = e$) mit $e \neq 0, 1$;

(iii) Es gibt Ringe R_1, R_2 mit $R \cong R_1 \times R_2$.

Aufgabe 5.* Sei K ein Körper und A eine K-Algebra mit $\dim_K(A) = n < \infty$.

(a) Zeigen Sie, dass jedes Primideal von A maximal ist.

(b) Zeigen Sie, dass A höchstens n Primideale besitzt.

(c) Spec A hat genau dann n Elemente, wenn gilt $A \cong K \times \ldots \times K$ (n Faktoren).

(d) Sei K/k eine endliche Körpererweiterung vom Grad n. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Bedingungen:

(i) K/k ist galoissch;

(ii) Spec $K \otimes_k K$ hat genau n Elemente.

(Erinnerung: K/k ist genau dann galoissch, wenn $\mathrm{Hom}_k(K, K)$ n Elemente besitzt).