Spieß

3. Übung zur Vorlesung Algebra 3

Sommersemester 2011 Abgabe: Do, 5.5.2011

Aufgabe 1. Sei R ein Ring und sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$. Zeigen Sie:

(a) Sei $S \subseteq R$ eine multiplikative Teilmenge. Es gilt:

$$\operatorname{rad}(S^{-1}R) \;=\; S^{-1}\operatorname{rad}(R).$$

(b) $\mathfrak{p}$ genau dann minimal ist, wenn jedes Element von $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ nilpotent ist.

(c) Ist $\mathfrak{p}$ minimal, so ist jedes Element $x \in \mathfrak{p}$, $x \neq 0$ ein Nullteiler.

(d) Ist R reduziert, so ist jeder Nullteiler von R in einem minimalen Primideal enthalten.

Aufgabe 2. Sei R ein Ring. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathbb{A}^n_R \colon = \operatorname{Spec} R[T_1, \ldots, T_n]$ und sei $\pi : \mathbb{A}^n_R \to \operatorname{Spec} R$ die Abbildung, die durch die Inklusion $R \hookrightarrow R[T_1, \ldots, T_n]$ induziert wird. Für $f = \sum_{\nu \in \mathbb{N}_0^n} a_\nu T^\nu \in R[T_1, \ldots, T_n]$ bezeichne $\mathcal{I}(f)$ das Ideal, das von den Koeffizienten a_ν von f erzeugt wird (man nennt $\mathcal{I}(f)$ den *Inhalt* von f). Zeigen Sie, dass gilt $\pi(D(f)) = \operatorname{Spec} R - V(\mathcal{I}(f))$. Insbesondere folgt, dass π eine offene Abbildung ist.

Aufgabe 3. Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Bestimmen Sie die irreduziblen Komponenten, der folgenden Ringspektren:

(a) $\operatorname{Spec} k[X, Y, Z]/(X^2 - YZ, XZ - X)$;

(b) $\operatorname{Spec} k[X, Y, Z]/(X^2 - YZ, X^3 - Y^3)$.

Aufgabe 4. Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und $k[A, B, C, D]$ der Polynomring in den 4 Unbestimmten A, B, C, D über k. Sei

$$\mathfrak{a} \colon = (AA + BC, AB + BD, CA + CD, CB + DD)$$

und setze $R = k[A, B, C, D]/\mathfrak{a}$. Zeigen Sie:

(a) $\mathfrak{a} \subsetneq \sqrt{\mathfrak{a}} = (AD - BC, A + D)$.

(b) $\operatorname{Spec} R$ ist irreduzibel.

(Hinweis: Eine 2×2 Matrix M ist genau dann nilpotent, wenn gilt $\mathrm{Spur} M = 0 = \det M$).

Aufgabe 5.* Sei k ein Körper und sei A eine endlich erzeugte k-Algebra. Zeigen Sie:

(a) $\operatorname{Max} A$ ist dicht in $\operatorname{Spec} A$.

(b) Ist $\operatorname{Spec} A$ endlich, so gilt $\operatorname{Max} A = \operatorname{Spec} A$.

(c) Ist $\operatorname{Spec} A$ endlich, so ist A eine endliche k-Algebra (d.h. $\dim_k A$ ist endlich). (Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall, dass A reduziert ist. Zeigen Sie im allgemeinen Fall, dass gilt $\operatorname{rad}(A)^n = (0)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und beachten Sie, dass die Quotienten der Filtrierung $A \supseteq \operatorname{rad}(A)^1 \supseteq \operatorname{rad}(A)^2 \supseteq \ldots \supseteq \operatorname{rad}(A)^{n-1} \supseteq \operatorname{rad}(A)^n = (0)$ endlich erzeugte $A_{\mathrm{red}} : = A/\operatorname{rad}(A)$-Moduln sind).