Spieß

4. Übung zur Vorlesung Algebra 3

Sommersemester 2011 Abgabe: Do, 12.5.2011

Aufgabe 1. Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf dem topologischen Raum X und seien $s, t \in \mathcal{F}$. Zeigen Sie, dass $\{x \in X \mid s_x = t_x\}$ eine offene Teilmenge von X ist.

Aufgabe 2. Sei X ein topologischer Raum, Y eine Teilmenge von X und A eine abelsche Gruppe mit $A \neq 0$. Wir definieren eine Prägarbe $\mathcal{F}$ auf X durch

$$\mathcal{F}(U) \ = \ \begin{cases} A & \text{falls } U \cap Y \neq \emptyset, \\ 0 & \text{falls } U \cap Y = \emptyset. \end{cases}$$

mit der Identität bzw. Nullabbildung als Restriktionen.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ genau dann eine Garbe ist, wenn Y irreduzibel ist.

(b) Bestimmen Sie die Halme $\mathcal{F}_x$, $x \in X$ von $\mathcal{F}$.

Aufgabe 3. Sei $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Homomorphismus von Garben von abelschen Gruppen.

(a) Zeigen Sie, dass α genau dann injektiv ist (d.h. $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G}$ ist eine exakte Sequenz von Garben), wenn $\alpha(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ injektiv ist für alle offenen Teilmengen U von X.

(b) Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(i) α ist surjektiv (d.h. $\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \to 0$ ist eine exakte Sequenz von Garben);

(ii) Zu jeder offenen Menge $U \subseteq X$ und jedem $t \in \mathcal{G}(U)$ gibt es eine offene Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von U und Elemente $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$, so dass gilt $\alpha(U_i)(s_i) = t|_{U_i}$ für alle $i \in I$.

Aufgabe 4. Eine Garbe $\mathcal{F}$ auf dem topologischer Raum X heisst welk, wenn die Restriktionsabbildungen $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ für alle offenen Teilmengen $V \subseteq U$ surjektiv sind. Sei

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_1 \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{\beta} \mathcal{F}_3 \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Garben. Zeigen Sie:

(a) Für jede offene Teilmenge U von X ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_1(U) \xrightarrow{\alpha(U)} \mathcal{F}_2(U) \xrightarrow{\beta(U)} \mathcal{F}_3(U)$$

exakt.

(b) Ist $\mathcal{F}_1$ welk, so ist sogar die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_1(U) \xrightarrow{\alpha(U)} \mathcal{F}_2(U) \xrightarrow{\beta(U)} \mathcal{F}_3(U) \longrightarrow 0$$

für alle offenen $U \subseteq X$ exakt.