Spieß

5. Übung zur Vorlesung Algebra 3

Sommersemester 2011 Abgabe: Do, 12.5.2011

Aufgabe 1. Sei X ein topologischer Raum und $\mathfrak{B}$ eine Basis der Topologie auf X. Seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Garben von abelschen Gruppen auf X und sei

$$(\alpha_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U))_{U \in \mathfrak{B}}$$

eine Familie von Homomorphismen, die verträglich mit den Restriktionsabbildungen ist. Zeigen Sie:

(a) Es gibt genau einen Homomorphismus von Garben $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ mit $\alpha(U) = \alpha_U$ für alle $U \in \mathfrak{B}$.

(b) Ist α_U injektiv (bzw. surjektiv) für alle $U \in \mathfrak{B}$, so ist α injektiv (bzw. surjektiv).

Aufgabe 2. Sei R ein Ring und S eine multiplikative Teilmenge von R.

(a) Sei $f : M \to N$ ein Homomorphismus von R–Moduln. Zeigen Sie, dass die Abbildung $S^{-1}f : S^{-1}M \to S^{-1}N, \frac{m}{s} \mapsto \frac{f(m)}{s}$ ein wohldefinierter Homomorphismus von $(S^{-1}R)$–Moduln ist.

(a) Sei $M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3$ eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln. Zeigen Sie, dass die induzierte Sequenz

$$S^{-1}M_1 \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}M_2 \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}M_3$$

ebenfalls exakt ist.

(b) Sei $C_\bullet = (\ldots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \longrightarrow \ldots)$ ein Komplex von R-Moduln. Zeigen Sie, dass gilt

$$S^{-1}H_n(C_\bullet) \cong H_n(S^{-1}C_\bullet).$$

Aufgabe 3. Sei R ein Ring und $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$. Zeigen Sie, dass es einen natürlichen Ringisomorphismus gibt

$$\varinjlim_{f \in (R - \mathfrak{p})} R_f \quad \cong \quad R_{\mathfrak{p}}.$$

Aufgabe 4. (a) Sei R ein Ring und $X = \operatorname{Spec} R$ das zugehörige affine Schema. Sei $f \in R$ und $U = D(f)$. Zeigen Sie, dass der lokal geringte Raum $(U, (\mathcal{O}_X)|_U)$ isomorph zum affinen Schema Spec R_f ist.

(b) Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema und $U \subseteq X$ offen. Zeigen Sie, dass $(U, (\mathcal{O}_X)|_U)$ ein Schema ist.

Aufgabe 5. Sei $X = (X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema und R ein Ring. Einem Morphismus $f = (f, f^\sharp) : X \to \operatorname{Spec} R$ von Schemata ordnen wir den Ringhomomorphismus

$$\rho(f) \colon = f^\sharp(\operatorname{Spec} R) : R = \mathcal{O}_R(\operatorname{Spec} R) \to f_*(\mathcal{O}_X)(\operatorname{Spec} R) = \mathcal{O}_X(X)$$

zu. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\rho : \operatorname{Hom}(X, \operatorname{Spec} R) \longrightarrow \operatorname{Hom}(R, \mathcal{O}_X(X))$$

von der Menge der Morphismen $X \to \operatorname{Spec} R$ in die Menge der Ringhomomorphismen $R \to \mathcal{O}_X(X)$ bijektiv ist (Hinweis: Vergleichen Sie die Aussage mit Satz 6.7).