Spieß

# 6. Übung zur Vorlesung Algebra 3

Sommersemester 2011 Abgabe: Do, 12.5.2011

**Aufgabe 1.** Sei $A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$ ein graduierter Ring und $\mathfrak{p} \subseteq A$ ein homogenes Primideal mit $\mathfrak{p} \not\supseteq A_+ := \bigoplus_{n\geq 1} A_n$. Zeigen Sie:

(a) $A_{(\mathfrak{p})}$ ist ein lokaler Ring.

(b) Es gibt einen kanonischen Ringisomorphismus

$$\varinjlim_{f} A_{(f)} \quad \cong \quad A_{(\mathfrak{p})}$$

wobei $f$ die induktiv geordnete Menge der homogenen Elemente von $A_+ - \mathfrak{p}$ durchläuft (dabei definieren wir $f \leq g :\Leftrightarrow D_+(g) \subseteq D_+(f)$ für homogenen Elemente $f, g \in A_+ - \mathfrak{p}$).

**Aufgabe 2.** Seien $A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$, $B = \bigoplus_{n\geq 0} B_n$ graduierte Ringe und $\phi : A \to B$ ein homogener Ringhomomorphismus vom Grad $d \geq 1$ (d.h. es gilt $\phi(A_n) \subseteq B_{dn}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$). Zeigen Sie:

(a) $U := \{\mathfrak{p} \in \text{Proj } B \mid \mathfrak{p} \not\supseteq \phi(A_+)\}$ ist offen in Proj $B$ und es gibt einen kanonischen Morphismus von Schemata $\phi^* : U \to \text{Proj } A$.

(b) Es gebe ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\phi_n := \phi|_{A_n} : A_n \to B_{dn}$ für alle $n \geq N$ ein Isomorphismus ist. Dann gilt $U = \text{Proj } B$ und $\phi^* : \text{Proj } B \to \text{Proj } A$ ist ein Isomorphismus (Hinweis: Behandeln Sie zunächst die Spezialfälle (1) $d = 1$ und (2) $A = \bigoplus_{n\geq 0} B_{dn}$, d.h. $A_n = B_{dn}$ und $\phi : A \hookrightarrow B$ ist die Inklusion).

**Aufgabe 3.** Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema. Eine Teilmenge $U$ von $X$ heisst affin-offen, wenn $U$ offen in $X$ ist und $(U, (\mathcal{O}_X)|_U)$ ein affines Schema ist (d.h. $(U, (\mathcal{O}_X)|_U) \cong \text{Spec } \mathcal{O}_X(U)$). Das Schema $(X, \mathcal{O}_X)$ heisst lokal-noethersch (bzw. noethersch), wenn es eine affin-offene (bzw. eine endliche affin-offene) Überdeckung $\{U_i\}_{i\in I}$ von $X$ gibt, so dass $\mathcal{O}(U_i)$ für alle $i \in I$ ein noetherscher Ring ist. Das Schema $(X, \mathcal{O}_X)$ heisst quasikompakt, wenn der topologische Raum $X$ quasikompakt ist. Zeigen Sie:

(a) Ist $(X, \mathcal{O}_X)$ noethersch, so ist der topologische Raum $X$ noethersch.

(b) $(X, \mathcal{O}_X)$ ist genau dann noethersch, wenn $(X, \mathcal{O}_X)$ lokal-noethersch und quasikompakt ist.

(c) Für ein affines Schema $X = \operatorname{Spec} R$ sind folgende Bedingungen äquivalent: (i) $X$ ist noethersch, (ii) $X$ ist lokal-noethersch, (iii) $R$ ist noethersch.

(d) Ist $(X, \mathcal{O}_X)$ lokal-noethersch und $U \subseteq X$ offen, so ist $(U, (\mathcal{O}_X)|_U)$ lokal-noethersch.

(e) $(X, \mathcal{O}_X)$ ist genau dann lokal-noethersch, wenn für alle affin-offenen $U \subseteq X$ der Ring $\mathcal{O}_X(U)$ noethersch ist.

**Aufgabe 4.** Sei $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ ein noetherscher graduierter Ring. Zeigen Sie:

(a) Ist $f \in A_+ = \bigoplus_{n>0} A_n$ ein homogenes Element, so ist $A_{(f)}$ noethersch.

(b) $\operatorname{Proj} A$ ist ein noethersches Schema.