Spieß

7. Übung zur Vorlesung Algebra 3

Sommersemester 2011 Abgabe: Do, 9.6.2011

Aufgabe 1. Sei X ein affines Schema und seien $U, V \subseteq X$ affin-offen. Zeigen Sie, dass $U \cap V$ affin ist.

Aufgabe 2. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei $\mathbb{A}^n_K = \operatorname{Spec} K[T_1, \ldots, T_n]$ der n-dimensionale affine Raum über K (für $n \geq 1$) . Sei $x \in \mathbb{A}^n_K$ ein abgeschlossener Punkt und sei $X \subseteq \mathbb{A}^n_K$ das Komplement von $\{x\}$. Zeigen Sie:

(a) Ist $n \geq 2$ so gilt $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}(X) = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}(\mathbb{A}^n) = K[T_1, \ldots, T_n]$.

(b) X ist dann und nur dann affin, wenn gilt $n = 1$.

Aufgabe 3. Sei $\iota : Y \to X$ ein Morphismus von Schemata. Für ein offenes Unterschema $U \subseteq X$ sei $\iota_U : i^{-1}(U) \to U$ der induzierte Morphismus. Zeigen Sie:

(a) Ist ι eine abgeschlossene Immersion, so ist auch ι_U eine abgeschlossene Immersion.

(b) ι ist genau dann eine abgeschlossene Immersion, wenn ι ein Homöomorphismus von $\operatorname{sp}(Y)$ auf eine abgeschlossene Teilmenge von $\operatorname{sp}(X)$ ist und wenn für alle affin-offenen $U \subseteq X$ der Ringhomomorphismus $\iota^\sharp(U) : \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_Y(\iota^{-1}(U))$ surjektiv ist.

Aufgabe 4. Seien $A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$, $B = \bigoplus_{n\geq 0} B_n$ graduierte Ringe und $\phi : A \to B$ ein homogener Ringepimorphismus vom Grad 1 (d.h. es gilt $\phi(A_n) = B_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$). Seien $U \subseteq \operatorname{Proj} B$ und ϕ^* wie in Aufgabe 2, Übung 6 definiert. Zeigen Sie, dass gilt $U = \operatorname{Proj} B$ und dass $\phi^* : \operatorname{Proj} B \to \operatorname{Proj} A$ eine abgeschlossenen Immersion ist.

Aufgabe 5. Sei X ein Schema und A eine abgeschlossene Teilmenge von $\operatorname{sp}(X)$. Zeigen Sie, dass es eine (bis auf Isomorphie) eindeutige abgeschlossene Immersion $\iota : Y \to X$ gibt mit (i) Y ist reduziert und (ii) $\iota(Y) = A$.

Aufgabe 6.* Sei X ein Schema. Für $s \in \mathcal{O}_X(X)$ setze $X_s \colon = \{x \in X \mid s_x \in \mathcal{O}_{X,x}^*\}$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt: $X = X_s \iff s \in \mathcal{O}_X(X)^*$.

(b) Für $U \subseteq X$ offen gilt $U \cap X_s = U_{s|_U}$.

(c) Ist X affin, so ist X_s eine standard-offene Menge von X.

(d) X_s ist offen.

(e) Sei $f : Y \to X$ ein Morphismus von Schemata. Dann gilt $f^{-1}(X_s) = Y_{f^\sharp(s)}$.

(f) Die Restriktion $\mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_X(X_s)$ induziert einen kanonischen Ringhomomorphismus $\psi_s : \mathcal{O}_X(X)_s \to \mathcal{O}_X(X_s)$. Ist X affin, so ist ψ_s ein Isomorphismus.

(g) Besitzt X eine endliche affin-offene Überdeckung $\{U_i\}_{i=1,\ldots,r}$, so dass $U_i \cap U_j$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ affin ist, so ist $\psi_s : \mathcal{O}_X(X)_s \to \mathcal{O}_X(X_s)$ ein Isomorphismus für alle $s \in \mathcal{O}_X(X)$.

(h) Es gebe $s_1, \ldots, s_r \in \mathcal{O}_X(X)$ mit

(i) X_{s_i} ist affin für $i = 1, \ldots, r$;

(ii) für das von $s_1, \ldots, s_r$ erzeuge Ideal gilt $\langle s_1, \ldots, s_r \rangle = \mathcal{O}_X(X)$.

Dann ist X affin.