Spieß

8. Übung zur Vorlesung Algebra 3

Sommersemester 2011 Abgabe: Do, 16.6.2011

Aufgabe 1. Sei S ein Schema und T ein S-Schema. Für ein weiteres S-Schema X bezeichne $X(T) = \mathrm{Hom}_S(T, X)$ die Menge der T-wertigen Punkte von X und für ein Morphismus $f : X \to Y$ sei $f(T) : X(T) \to Z(T)$ die Abbildung $\phi \mapsto f \circ \phi$. Zeigen Sie, dass f genau dann ein Isomorphismus ist, wenn $f(T) : X(T) \to Y(T)$ für alle S-Schemata T bijektiv ist.

Aufgabe 2. Für ein Schema X bezeichne $\mathrm{sp}(X)$ den unterliegenden topologischen Raum.

(a) Sei S ein Schema und seien X, Y S-Schemata. Zeigen Sie, dass es eine kanonische Abbildung von $\mathrm{sp}(X \times_S Y)$ in das mengentheoretische Faserprodukt $\mathrm{sp}(X) \times_{\mathrm{sp}(S)} \mathrm{sp}(Y)$ gibt.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\mathrm{sp}(X \times_S Y) \to \mathrm{sp}(X) \times_{\mathrm{sp}(S)} \mathrm{sp}(Y)$ aus (a) surjektiv ist.

Aufgabe 3. Sei R ein Ring. Zeigen Sie, dass es einen kanonischen Isomorphismus

$$\mathbb{P}^n_R = \mathbb{P}^n \times_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}} \mathrm{Spec}\, R \;\cong\; \mathrm{Proj}\, R[T_0, \ldots, T_n]$$

gibt.

Aufgabe 4. Sei $U_i = \mathbb{A}^1 = \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[T_i]$ für $i = 1, 2$ und seien $U_{12} \subseteq U_1$, $U_{21} \subseteq U_2$ die offenen Unterschemata $U_{12} = D(T_1) = \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[T_1, T_1^{-1}]$, $U_{21} = D(T_2) = \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[T_2, T_2^{-1}]$. Sei $\phi : U_{12} \to U_{21}$ der Isomorphismus der durch den Ringisomorphismus $\mathbb{Z}[T_2, T_2^{-1}] \to \mathbb{Z}[T_1, T_1^{-1}], T_2 \mapsto \frac{1}{T_1}$ induziert ist und sei X das Schema, dass durch Verklebung von U_1 und U_2 entlang des Isomorphismus $\phi : U_{12} \to U_{21}$ entsteht (vergl. Lemma 8.4). Zeigen Sie, dass X isomorph zu $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$ ist.

Aufgabe 5. Sei S ein Schema. Ein S-*Gruppenschema* ist ein S-Schema G zusammen mit S-Morphismen $m : G \times_S G \to G$, $\mu : G \to G$ und $e : S \to G$, so dass die folgenden Diagramme kommutieren

$$\begin{tikzcd}
G \times_S G \times_S G \arrow[r, "m\times\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\times m"] & G \times_S G \arrow[d, "m"] \\
G \times_S G \arrow[r, "m"] & G
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "(\mu,\mathrm{id})"] \arrow[d] & G \times_S G \arrow[d, "m"] \\
S \arrow[r, "e"] & G
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
S \times_S G \arrow[r, "e\times\mathrm{id}"] \arrow[d, "pr_G"] & G \times_S G \arrow[d, "m"] \\
G \arrow[r, "\mathrm{id}"] & G.
\end{tikzcd}$$

(a) Sei G ein S-Gruppenschema und T ein S-Schema. Zeigen Sie, dass die Menge der T-wertigen Punkte $G(T)$ von G eine natürliche Gruppenstruktur besitzt.

(b) Sei $\mathbb{G}_m := \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[T, T^{-1}]$ und seien

$$m : \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m, \quad \mu : \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m, \quad e : \operatorname{Spec} \mathbb{Z} \to \mathbb{G}_m,$$

die durch die Ringhomomorphismen

$$\begin{array}{rll}
m^* : & \mathbb{Z}[T,T^{-1}] \to \mathbb{Z}[T,T^{-1}] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[T,T^{-1}], & T \mapsto T \otimes T \\
\mu^* : & \mathbb{Z}[T,T^{-1}] \to \mathbb{Z}[T,T^{-1}], & T \mapsto T^{-1} \\
e^* : & \mathbb{Z}[T,T^{-1}] \to \mathbb{Z}, & T \mapsto 1
\end{array}$$

induzierten Morphismen. Zeigen Sie, dass $\mathbb{G}_m$ zusammen mit den Morphismen m, μ und e ein $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$-Gruppenschema ist. Bestimmen Sie $\mathbb{G}_m(X) := \operatorname{Hom}(X, \mathbb{G}_m)$ für ein beliebiges Schema X.