Spieß

9. Übung zur Vorlesung Algebra 3

Sommersemester 2011 Abgabe: Do, 30.6.2011

Aufgabe 1. Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Schemata. Zeigen Sie, dass die Eigenschaft "f ist surjektiv" stabil unter Basiswechsel ist.

Aufgabe 2. Sei $f : X \to S$ ein Morphismus. Ein *Schnitt* von f ist ein Morphismus $s : S \to X$ mit $f \circ s = \mathrm{id}_S$. Für ein S-Schema Y bezeichne f_Y den Basiswechsel von f bzgl. des Strukturmorphismus $Y \to S$, d.h. $f_Y :=\mathrm{pr}_Y : X \times_S Y \to Y$. Zeigen Sie:

(a) Ist f separiert, so ist jeder Schnitt von f eine abgeschlossene Immersion. (Hinweis: Satz 2.9 (e)).

(b) Gilt umgekehrt für alle S-Schemata Y, dass jeder Schnitt von f_Y eine abgeschlossene Immersion ist, so ist f separiert.

Aufgabe 3. Seien $f : X \to S, g : Y \to S$ Morphismen mit X, Y affin und S separiert. Zeigen Sie, dass $X \times_S Y$ ebenfalls affin ist. Insbesondere ist der Durchschnitt zweier affin-offener Teilmengen eines separierten Schemas wieder affin.

(Hinweis: Zeigen Sie, dass der kanonische Morphismus $X \times_S Y \to X \times_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}} Y$ Basiswechsel von $\Delta_{S/\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}}$ ist).

Aufgabe 4. Sei X ein Schema und $x, y \in X$. Erinnerung: y heisst Spezialisierung von x (Notation: $x \rightsquigarrow y$), wenn gilt $y \in \overline{\{x\}}$. Zeigen Sie:

(a) Der Punkt y ist genau dann Spezialisierung von x, wenn es einen lokalen Integritätsbereich R und einen Morphismus $f : \mathrm{Spec}\, R \to X$ gibt mit $f(\mathfrak{m}) = y$ und $f((0)) = x$. Hierbei bezeichnet $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von R.

(b) Es gibt einen kanonischen Morphismus $\mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_{X,x} \to X$ der einen Homöomorphismus von $\mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_{X,x}$ auf den Unterraum $\{y \in X \mid y \rightsquigarrow x\}$ von X induziert.

Aufgabe 5. Sei $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ ein graduierter Ring. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Proj}\, A$ separiert ist.

Aufgabe 6. Sei $\mathcal{P}$ eine Eigenschaft von Morphismen von Schemata für die gilt:

(1) Jede abgeschlossene Immersion hat die Eigenschaft $\mathcal{P}$.

(2) Die Eigenschaft $\mathcal{P}$ ist stabil unter Komposition.

(3) Die Eigenschaft $\mathcal{P}$ ist stabil unter Basiswechsel.

Zeigen Sie, dass dann gilt:

(4) Sind $f : X_1 \to Y_1, g : X_2 \to Y_2$ Morphismen mit $\mathcal{P}$, so hat auch $f \times g : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ die Eigenschaft $\mathcal{P}$.

(5) Seien $f : X \to Y, g : Y \to S$ Morphismen. Ist g separiert und hat $g \circ f$ die Eigenschaft $\mathcal{P}$ so hat auch f die Eigenschaft $\mathcal{P}$.

(Hinweis: Der *Graphmorphismus* $\Gamma_f = (\mathrm{id}, f) : X \to X \times_S Y$ ist Basiswechsel von $\Delta_Y : Y \to Y \times_S Y$).