Prof. Dr. M. Spieß

1. Übung zur Vorlesung
Lineare Algebra 1

Abgabetermin: Do, 3.11.05

Aufgabe 1. Seien X, Y zwei Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung.
(a) Sei $A \subset X$ und $B \subset Y$. Zeigen Sie, dass $A \subset f^{-1}(f(A))$ und $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
(b) Welche Eigenschaft muss man für f fordern, damit sogar $A = f^{-1}(f(A))$ für alle Teilmengen $A \subset X$ gilt?

Aufgabe 2. (a) Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität und Surjektivität.
$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto 3n^2 - 2n + 5$;
$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto n + (-1)^n$;
$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}, (x, y) \mapsto x^2 + y^2$.
(b) Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen nicht-leeren Mengen. Zeigen Sie, dass f genau dann injektiv ist, wenn es eine Abbildung $g : Y \to X$ gibt, so dass $g \circ f = Id_X$ gilt.

Aufgabe 3. Sei X eine Menge die mindestens drei verschiedene Elemente enthält.
(a) Zeigen Sie, dass das Paar $(\mathrm{Bij}(X, X), \circ)$, bestehend aus der Menge

$$\mathrm{Bij}(X, X) := \{f \mid f : X \to X \text{ ist bijektiv}\}$$

und der Komposition $(f, g) \mapsto f \circ g$, eine Gruppe ist.
(b) Zeigen Sie, dass $(\mathrm{Bij}(X, X), \circ)$ nicht abelsch ist, falls X mindestens drei verschiedene Elemente besitzt.

Aufgabe 4. Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit $a \circ a = e$ für alle $a \in G$. Zeigen Sie, dass G abelsch ist.