Prof. Dr. M. Spieß

10. Übung zur Vorlesung
Lineare Algebra 1

Abgabetermin: Do, 19.1.06

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden homogenen linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & -1 & 9 \\ -1 & 5 & -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

über $\mathbb{Q}$ und über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_{11}$ mit 11 Elementen.

Aufgabe 2. Für welche $a, c \in \mathbb{R}$ ist das reelle Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 4x & + & 5y & + & 6z & = & 2 \\ 7x & + & 8y & + & az & = & 3 \\ 5x & + & 7y & + & 9z & = & c \end{array}$$

(i) lösbar, (ii) eindeutig lösbar und (iii) unlösbar? Geben Sie jeweils die Lösungsmenge an.

Aufgabe 3. Die Spur einer 3×3-Matrix ist die Summe ihrer Diagonaleinträge, d.h.

$$\mathrm{Spur} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} : = a_{11} + a_{22} + a_{33}.$$

(a) Sei $V = M(3 \times 3, \mathbb{R})$ der reelle Vektorraum aller 3×3-Matrizen. Sei

$$< \ , \ >: V \times V \to \mathbb{R}$$

definiert durch $< A, B >: = \mathrm{Spur}(AB^t)$. Zeigen Sie, dass $< \ , \ >$ ein Skalarprodukt ist.

(b) Sei U die Menge der *symmetrischen* 3×3-Matrizen, d.h.

$$U: = \{A \in M(3 \times 3, \mathbb{R}) \mid A = A^t\}$$

Zeigen Sie, dass U ein 6-dimensionaler Untervektorraum von V ist und geben Sie eine orthonormale Basis von U an.

Aufgabe 4. Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ und $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{R})$ gegeben durch

$$a_{ij}: = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \\ -\frac{1}{2} & \text{falls } i = j+1 \text{ oder } i = j-1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die symmetrische Bilinearform

$$\beta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

sei definiert durch

$$\beta(x, y): = x \cdot A \cdot y^t = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j.$$

für alle $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass β positiv definit ist.