Prof. Dr. M. Spieß

11. Übung zur Vorlesung
Lineare Algebra 1

Abgabetermin: Do, 26.1.06

Aufgabe 1. (a) Zeigen Sie, dass

$$< f,g >:=\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$$

ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum $V=\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ der Polynome vom Grad $\leq n$ definiert.

(b) Geben Sie für $n=4$ eine ON-Basis des orthogonalen Komplements der konstanten Polynome an.

Aufgabe 2. Sei $(V,<\ ,\ >)$ ein euklidischer Vektorraum und U_1, U_2 Untervektorräume von V. Zeigen Sie:

(a) $U_1\subseteq U_2 \quad\Longleftrightarrow\quad U_2^{\perp}\subseteq U_1^{\perp}$.

(b) $(U_1\cap U_2)^{\perp}=U_2^{\perp}+U_1^{\perp}$.

(c) $(U_1+U_2)^{\perp}=U_2^{\perp}\cap U_1^{\perp}$.

Aufgabe 3. Sei $(V,<\ ,\ >)$ ein euklidischer Vektorraum und $f:V\to V$ eine Abbildung mit $f(0)=0$. Zeigen Sie:

$$f\in O(V) \quad\Longleftrightarrow\quad \text{Für alle } v,w\in V \text{ gilt: } \|f(v)-f(w)\|=\|v-w\|.$$

Aufgabe 4. Sei $(V,<\ ,\ >)$ ein euklidischer Vektorraum. Für $w\in V$ definieren wir eine Abbildung s_w durch $s_w(v):=v-2\frac{<v,w>}{<w,w>}w$ falls $w\neq 0$ und $s_0=Id_V$. Zeigen Sie:

(a) $s_w\in O(V)$ für alle $w\in V$.

(b) Für $u, w \in V - \{0\}$ gilt: $s_u = s_w \quad \Longleftrightarrow \quad$ Es gibt eine $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ mit $u = \lambda w$.

(c) Zu jedem $f \in O(V)$ gibt es $w_1, \ldots, w_r \in V$, $r \leq n$ mit der Eigenschaft $f = s_{w_1} \circ \ldots \circ s_{w_r}$.

(Hinweis: Finden Sie zunächst ein $w_1 \in V$ so dass $\widetilde{f} := s_{w_1} \circ f$ eine Gerade durch den Ursprung festhält und betrachten Sie dann die Einschränkung von $\widetilde{f}$ auf dem orthogonalen Komplement der Geraden.)