Prof. Dr. M. Spieß

11. Übung zur Vorlesung
Lineare Algebra 1

Abgabetermin: Do, 26.1.06

Aufgabe 1. (a) Zeigen Sie, dass

$$< f, g >: = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$$

ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum $V = \mathbb{R}[x]_{\leq n}$ der Polynome vom Grad $\leq n$ definiert.

(b) Geben Sie für $n = 4$ eine ON-Basis des orthogonalen Komplements der konstanten Polynome an.

Aufgabe 2. Sei $(V, < \ , \ >)$ ein euklidischer Vektorraum und U_1, U_2 Untervektorräume von V. Zeigen Sie:

(a) $U_1 \subseteq U_2 \quad \Longleftrightarrow \quad U_2^\perp \subseteq U_1^\perp$.

(b) $(U_1 \cap U_2)^\perp = U_2^\perp + U_1^\perp$.

(c) $(U_1 + U_2)^\perp = U_2^\perp \cap U_1^\perp$.

Aufgabe 3. Sei $(V, < \ , \ >)$ ein euklidischer Vektorraum und $f : V \to V$ eine Abbildung mit $f(0) = 0$. Zeigen Sie:

$$f \in O(V) \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Für alle } v, w \in V \text{ gilt: } \|f(v) - f(w)\| = \|v - w\|.$$

Aufgabe 4. Sei $(V, < \ , \ >)$ ein euklidischer Vektorraum. Für $w \in V$ definieren wir eine Abbildung s_w durch $s_w(v) : = v - 2\frac{<v,w>}{<w,w>}w$ falls $w \neq 0$ und $s_0 = Id_V$. Zeigen Sie:

(a) $s_w \in O(V)$ für alle $w \in V$.

(b) Für $u, w \in V - \{0\}$ gilt: $s_u = s_w \quad \Longleftrightarrow \quad$ Es gibt eine $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ mit $u = \lambda w$.

(c) Zu jedem $f \in O(V)$ gibt es $w_1, \ldots, w_r \in V$, $r \leq n$ mit der Eigenschaft $f = s_{w_1} \circ \ldots \circ s_{w_r}$.

(Hinweis: Finden Sie zunächst ein $w_1 \in V$ so dass $\widetilde{f} := s_{w_1} \circ f$ eine Gerade durch den Ursprung festhält und betrachten Sie dann die Einschränkung von $\widetilde{f}$ auf dem orthogonalen Komplement der Geraden.)