Prof. Dr. M. Spieß

12. Übung zur Vorlesung
Lineare Algebra 1

Abgabetermin: Do, 2.2.06

Aufgabe 1. Sei $(V, < \ , \ >)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum. Für einen Endomorphismus $f \in \mathrm{End}(V)$ bezeichne $f^* \in \mathrm{End}(V)$ die Adjungierte von f. Zeigen Sie:

(a) Für $f \in \mathrm{End}(V)$ sind $f \circ f^*$ und $f + f^*$ selbstadjungiert.

(b) Seien $f, g \in \mathrm{End}(V)$ beide selbstadjungiert. Zeigen Sie, dass $f \circ g$ genau dann selbstadjungiert ist, wenn $f \circ g = g \circ f$ ist.

Aufgabe 2. Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und $\xi : V \times V \to \mathbb{C}$ eine Sesquilinearform. Wir zerlegen

$$\xi(v, w) = \beta(v, w) + i\gamma(v, w)$$

in Realteil $\beta(v, w) \in \mathbb{R}$ und Imaginärteil $\gamma(v, w) \in \mathbb{R}$.

(a) Verifizieren Sie, dass $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ und $\gamma : V \times V \to \mathbb{R}$ zwei $\mathbb{R}$-Bilinearformen auf $V_{\mathbb{R}}$ sind (dabei bedeutet der Index $\mathbb{R}$ bei $V_{\mathbb{R}}$, dass wir V nur als reellen Vektorraum auffassen).

(b) Zeigen Sie, dass die Bilinearformen β und γ invariant unter der Multiplikation mit $i \in \mathbb{C}$ sind, d.h. es gilt $\beta(iv, iw) = \beta(v, w)$ und $\gamma(iv, iw) = \gamma(v, w)$ für alle $v, w \in V$.

(c) Zeigen Sie, dass die folgenden drei Aussagen äquivalent sind:
(i) ξ ist hermitesch, (ii) β ist symmetrisch, (iii) γ ist alternierend.

(d) Sei jetzt ξ ein hermitesches Skalarprodukt und $(v_1, \ldots, v_n)$ eine ON-Basis von V (bzgl. ξ). Zeigen Sie, dass dann $(v_1, iv_1, v_2, iv_2, \ldots, v_n, iv_n)$ eine ON-Basis von $V_{\mathbb{R}}$ ist (bzgl. β).

Aufgabe 3. Sei $(V, < \ , \ >)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum und $f : V \to V$ ein normaler Endomorphismus (d.h. es gilt $f \circ f^* = f^* \circ f$). Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{Kern}(f) = \mathrm{Kern}(f^*)$.

(b) $\mathrm{Kern}(f)^{\perp} = \mathrm{Bild}(f)$.

(c) Ist $f^3 = f^2$, so ist f ein Projektor. Gilt diese Aussage auch für nichtnormale Endomorphismen?