Prof. Dr. M. Spieß

2. Übung zur Vorlesung
Lineare Algebra 1

Abgabetermin: Do, 10.11.05

Aufgabe 1. Sei K ein Körper. Für $a, b \in K, b \neq 0$ schreibe $\frac{a}{b}$ für ab^{-1}. Leiten Sie aus den Körperaxiomen die folgende Identität her:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \qquad \forall\, a, b, c, d \in K, b \neq 0, d \neq 0.$$

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass $\sqrt{3}$ nicht zu dem Unterkörper $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{x \in \mathbb{R} \mid x = a + b\sqrt{2}, a, b \in \mathbb{Q}\}$ von $\mathbb{R}$ gehört.

Aufgabe 3. Konstruieren Sie einen Körper mit 4 Elementen.

Aufgabe 4. Es sei n eine positive ganze Zahl die keine Primzahl ist. Für eine natürliche Zahl m bezeichne $r(m)$ den Rest von m bei der Division durch n, d.h. $r(m)$ ist die eindeutig bestimmte natürliche Zahl zwischen 0 und $n-1$, für die $\frac{m - r(m)}{n} \in \mathbb{N}$ gilt. Für $a, b \in R_n := \{0, 1, \ldots, n-1\}$ setze

$$a \oplus b := r(a + b),$$

$$a \odot b := r(ab).$$

Zeigen Sie, dass $(R_n, \oplus, \odot)$ kein Körper ist.