Prof. Dr. M. Spieß

3. Übung zur Vorlesung
Lineare Algebra 1

Abgabetermin: Do, 17.11.05

Aufgabe 1. (a) Welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ sind Untervektorräume:

$$\{(x,y,z) \mid z \geq 0\}, \quad \{(x,y,z) \mid x+y+z=1\}, \quad \{(x,y,z) \mid y+z=0\},$$

$$\{(x,y,z) \mid x+y+z=0\} \cup \{(x,y,z) \mid x-y+2z=0\}.$$

(b) Welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ der Funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sind Untervektorräume:

$$\{f \mid f(x^2)=f(x)^2 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\}, \quad \{f \mid f(4)=0\}, \quad \{f \mid f(0)=4\},$$

$$\{f \mid f \text{ ist ein Polynom vom Grad } n\},$$

$$\{f \mid f \text{ ist ein Polynom vom Grad } \leq n\}.$$

Aufgabe 2. Gegeben seien m Vektoren $v_1,\dots,v_m$ in einem K-Vektorraum V. Wir definieren

$$\mathfrak{M} := \{U \mid U \text{ ist Untervektorraum von } V \text{ und } v_1,\dots,v_m \in U\}$$

und

$$\bigcap_{U\in\mathfrak{M}} U := \{v \in V \mid v \in U \text{ für alle } U \in \mathfrak{M}\}.$$

Zeigen Sie: $\quad L(v_1,\dots,v_m) = \bigcap_{U\in\mathfrak{M}} U$.

Aufgabe 3. Sei K ein Körper und $(a,b),(x,y) \in K^2$. Zeigen Sie, dass die Vektoren $(a,b),(x,y)$ genau dann linear abhängig sind, wenn $ay-bx=0$ ist.

Aufgabe 4. (a) Gegeben seien $n+1$ ($n \in \mathbb{N}$) linear abhängige differenzierbare Funktionen $f_0, f_1, \ldots, f_n \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Zeigen Sie: Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist das $(n+1)$–Tupel

$$(f_0(x), f_0'(x), \ldots, f_0^{(n)}(x)), \ldots, (f_n(x), f_n'(x), \ldots, f_n^{(n)}(x))$$

von Vektoren des $\mathbb{R}^{n+1}$ linear abhängig.

(b) Wir definieren $f_0, f_1, \ldots, f_n$ aus $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ durch $f_0(x) :\ = 1$ und $f_i(x) :\ = x^i$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$. Zeigen Sie, dass $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ linear unabhängig ist.