Prof. Dr. M. Spieß

4. Übung zur Vorlesung
Lineare Algebra 1

Abgabetermin: Do, 24.11.05

Aufgabe 1. (a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $v_1 \colon = (0,1,\ldots,1), v_2 \colon = (1,0,1,\ldots,1),\ldots,v_n \colon = (1,\ldots,1,0)$ für $n \geq 2$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ bilden.

(b) Stellen Sie $e_1 \colon = (1,0,\ldots,0)$ als Linearkombination von $v_1, v_2, \ldots, v_n$ dar.

Aufgabe 2. Die Funktionen $f_1, f_2, f_3 \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ seien gegeben durch

$$f_1(x) \colon = \sin(x), \quad f_2(x) \colon = \sin(2x), \quad f_3(x) \colon = (1+\cos(x))\sin(x).$$

Bestimmen Sie eine Basis von $L(f_1, f_2, f_3)$.

Aufgabe 3. Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Definiere

$$d(V) = \max\{n \in \mathbb{N} \mid \begin{array}{l}\text{Es gibt Untervektorräume } U_0, U_1, \ldots, U_n \text{ von } V,\\ \text{so dass } U_0 \subsetneq U_1 \subsetneq \ldots \subsetneq U_n\}.\end{array}$$

Beweisen Sie, dass $d(V) = \dim(V)$ gilt.

Aufgabe 4. Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und seien $U_1, \ldots, U_k$ Untervektorräume von V. Zeigen Sie:

$$\dim(U_1 \cap \ldots \cap U_k) \geq \sum_{i=1}^{k} \dim(U_i) - (k-1)\dim(V).$$