Prof. Dr. M. Spieß

6. Übung zur Vorlesung
Lineare Algebra 1

Abgabetermin: Do, 8.12.05

Aufgabe 1. Gegeben seien $v_1 := (1,0,0,5), v_2 := (0,0,1,3) \in \mathbb{R}^4$. Finden Sie eine reelle 2×4-Matrix A, so dass der Kern von $\ell_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2, x \mapsto Ax$ die lineare Hülle von (v_1, v_2) ist.

Aufgabe 2. Seien V und W endlich-dimensionale K-Vektorräume, $n = \dim(V), m = \dim(W)$ und $f : V \to W$ ein Homomorphismus. Zeigen Sie, dass es eine Zahl $r \in \mathbb{N}$ und Basen $(v_1, \ldots, v_n)$ von V und $(w_1, \ldots, w_m)$ von W gibt, so dass für die Darstellungsmatrix $(a_{ij}) := M^{(v_1,\ldots,v_n)}_{(w_1,\ldots,w_m)}(f) \in M(m \times n, K)$ gilt:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, 1 \leq i, j \leq r, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 3. Sei V ein K-Vektorraum und U_1, U_2 Untervektorräume von V mit $U_1 + U_2 = V$ und $U_1 \cap U_2 = 0$. (V heisst dann die *direkte Summe* von U_1 und U_2. Schreibweise: $V = U_1 \oplus U_2$).

(a) Zeigen Sie: Zu jedem $v \in V$ gibt es eindeutig bestimmte $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$ mit $v = u_1 + u_2$.

(b) Wir definieren $p = p_{(U_1,U_2)} : V \to V$ durch $p(v) := u_2$. Zeigen Sie: (i) p linear ist,
(ii) $p \circ p = p$, (iii) $\mathrm{Kern}(p) = U_1$, (iv) $\mathrm{Bild}(p) = U_2$.

(c) Sei $n = \dim(V) < \infty$. Zeigen Sie, dass es eine Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von V gibt, so dass $M^{(v_1,\ldots,v_n)}_{(v_1,\ldots,v_n)}(p) \in M(n \times n, K)$ die in Aufgabe 2 angegebene Form hat.

(d) Ein $p \in \mathrm{Hom}(V,V)$ mit $p \circ p = p$ nennt man einen *Projektor*. Sei

$\mathfrak{M}\colon = \{(U_1, U_2) \mid\ U_1, U_2$ sind Untervektorräume von V mit $U_1 \oplus U_2 = V\}$.

Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{M} & \rightarrow & \{p \in \mathrm{Hom}(V,V) \mid\ p \text{ ist Projektor}\} \\ (U_1, U_2) & \mapsto & p_{(U_1,U_2)} \end{array}$$

bijective ist.

Aufgabe 4. Sei V ein K-Vektorraum und U_1, U_2 Untervektorräume von V.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\pi\mid_{U_1}\colon U_1 \rightarrow (U_1 + U_2)/U_2, x \mapsto x + U_2$ ein Epimorphismus mit Kern $= U_1 \cap U_2$ ist.

(b) Benutzen Sie die universelle Eigenschaft des Quotientenvektorraums (Satz 2.2.6 aus der Vorlesung) um zu zeigen, dass es einen natürlichen Isomorphismus

$$U_1/(U_1 \cap U_2) \cong (U_1 + U_2)/U_2$$

gibt.