

7. Übung zur Vorlesung Lineare Algebra 1

Abgabetermin: Do, 15.12.05

Aufgabe 1. Es sei $A \in M(2 \times 2, K)$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (i) $AB = BA$ für alle $B \in M(2 \times 2, K)$.
- (ii) Es gibt ein $\lambda \in K$ mit

$$A = \lambda E_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2. Berechnen Sie die Ränge der folgenden Matrizen. Welche der Matrizen ist invertierbar? Berechnen Sie gegebenenfalls die Inverse.

$$A: = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B: = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}, \quad C: = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D: = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3. Sei V ein n -dimensionaler K -Vektorraum und (v_1, \dots, v_n) eine Basis von V . Für $j \in \{1, \dots, n\}$ definieren wir $w_j := \sum_{i=1}^j v_i$.

- (a) Zeigen Sie, dass (w_1, \dots, w_n) eine Basis von V ist.
- (b) Berechnen Sie die Darstellungsmatrix $M_{(w_1, \dots, w_n)}^{(v_1, \dots, v_n)}(\text{Id}_V)$.

Aufgabe 4. (a) Zeigen Sie: Ist $A \in M(n \times n, K)$ mit $A^n = 0$, so ist $E_n + A$ invertierbar. (Hinweis: Betrachte $E_n - A + A^2 \pm \dots + (-A)^{n-1}$).

(b) Sei $G \subset M(n \times n, K)$ die Menge der oberen Dreiecksmatrizen mit 1 auf der Diagonalen, d.h.

$$G := \{(a_{ij}) \in M(n \times n, K) \mid a_{ij} = 0 \text{ falls } i > j \text{ und } a_{ij} = 1 \text{ falls } i = j\}.$$

Beweisen Sie, dass G eine Gruppe bzgl. der Matrizenmultiplikation ist.