Prof. Dr. M. Spieß

8. Übung zur Vorlesung
Lineare Algebra 1

Abgabetermin: Do, 22.12.05

Aufgabe 1. Schreiben Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

sowie ihre Inverse als Produkt von Elementarmatrizen.

Aufgabe 2. Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und U ein m-dimensionaler Untervektorraum von V. Sei $(u_1, \ldots, u_m)$ eine Basis von U und $\omega : V^n \to K$ eine Determinantenform auf V. Setze $k{:}\ = n - m$. Zeigen Sie, dass

$$\omega_{(u_1,\ldots,u_m)} : (V/U)^k \longrightarrow K, (v_1 + U, \ldots, v_k + U) \mapsto \omega(u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_k)$$

eine Determinantenform auf V/U definiert.

Aufgabe 3. (a) Es sei $(e_1, \ldots, e_n)$ die Standardbasis von K^n und ω die kanonische Determinantenform auf K^n, d.h. $\omega(e_1, \ldots, e_n) = 1$. Sei $v = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ ein beliebiger Vektor. Berechnen Sie:

$$\omega(v + e_1, \ldots, v + e_n).$$

für einen Vektor $v = (x_1, \ldots, x_n)$.

(b) Berechnen Sie die Determinante von:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \in M(n \times n, \mathbb{R}).$$

Aufgabe 4. Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum mit Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ und sei $f : V \to V$ die (eindeutig bestimmte) lineare Abbildung mit

$$f(v_i) = \begin{cases} v_{i+1} & \text{falls } i \in \{1, \ldots, n-1\} \\ v_1 & \text{falls } i = n \end{cases}$$

Berechnen Sie $\det(f)$.